Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 25.05.2012

7. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 01.06.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: In einem Raum, der $100\,m^3$ Luft enthält, befinden sich 15 Personen, wobei alle Fenster und Türen geschlossen sind. Dabei atme jede Person pro Minute etwa $0,25$ Liter CO_2 mehr aus als sie in dieser Zeit einatme. Nun werden durch eine Belüftungsanlage pro Minute $20\,m^3$ Frischluft, die $0,03$ Prozent CO_2 enthalte, in den Raum geblasen. Die Frischluft vermische sich sofort mit der Luft im Raum und von dieser Mischung werden durch die Belüftung pro Minute $20\,m^3$ aus dem Raum entfernt. Die Funktion $y(t)$ gebe den CO_2-Gehalt in Litern der Luft im Raum t Minuten nach dem Einschalten der Belüftungsanlage an ($t \geq 0$). Zum Zeitpunkt des Einschaltens der Belüftungsanlage enthalte die Luft im Raum $0,3$ Prozent CO_2.

a) Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz $y(t+\tau) - y(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass der CO_2-Gehalt der durch die Belüftung aus dem Raum entfernten Luft zwischen den Zeitpunkten t und $t+\tau$ Minuten konstant bleibt. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass y näherungsweise die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{5}y + 9,75$ für $t \geq 0$ erfüllt. 1

b) Berechnen Sie die Funktion $y(t)$, $t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems. 1

c) Wie lange dauert es nach dem Einschalten der Belüftung, bis die Luft im Raum noch $0,06$ Prozent CO_2 enthält? 1

Aufgabe 2: Die Funktion $y(t)$ gebe die Temperatur in Grad Celsius nach t Millisekunden in einem Explosionsprozess an. Durch die Explosion soll ein Motor ein Fahrzeug antreiben. Es sei bekannt, dass die Rate, mit der sich die Temperatur ändert, proportional zur Summe aus der aktuellen Temperatur und der dritten Potenz der aktuellen Temperatur sei. Dabei kann der Proportionalitätsfaktor $c > 0$ durch Veränderungen an der Steuerung des Motors beeinflusst werden. Der Explosionsprozess im Motor werde zur Zeit $t = 0$ gestartet und dabei herrsche im Motor eine Temperatur von 80 Grad Celsius.

a) Geben Sie das Anfangswertproblem an, das y löst. 1

b) Berechnen Sie die Funktion y. 1

c) Damit der Motor optimal funktioniert, soll die Explosion 15 Millisekunden nach dem Start stattfinden. Wie muss der Parameter c dazu gewählt werden? 1

Aufgabe 3: In einer Stadt mit 200 000 Einwohnern bricht eine ansteckende Krankheit aus. Wir nehmen an, dass jeder Einwohner der Stadt angesteckt werden kann und dass jede angesteckte Person ansteckend ist. Weiterhin sei die Krankheit nicht heilbar, aber auch nicht tödlich. Außerdem habe durchschnittlich jeder angesteckte Einwohner zwischen den Zeitpunkten t Tagen und $t + 1$ Tagen $K(t)$ Kontakte mit anderen Einwohnern der Stadt. Dabei führt jeder Kontakt eines Kranken mit einem Gesunden zur Ansteckung des Gesunden. Die Funktion $y(t)$ gebe die Anzahl der erkrankten Einwohner der Stadt nach t Tagen an ($t \geq 0$), wobei 100 Einwohner zur Zeit $t = 0$ erkrankt seien.

a) Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen Sie näherungsweise die Differenz $y(t + \tau) - y(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass die Anzahl der erkrankten Einwohner der Stadt zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Minuten ungefähr konstant bleibt. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass y näherungsweise die Differentialgleichung $y' = K(t) \cdot y - \frac{K(t)}{200\,000} \cdot y^2$ für $t \geq 0$ erfüllt. $\boxed{1}$

b) Es seien $k, \kappa \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die Fälle $K(t) := k$, $t \geq 0$, sowie $K(t) := \kappa \cdot e^{-t}$, $t \geq 0$, jeweils die Funktion $y(t)$, $t \geq 0$. $\boxed{2}$

c) Es seien nach einer Woche 5000 Einwohner der Stadt erkrankt. Bestimmen Sie für die beiden in Teil b) betrachteten Modelle jeweils, wie viele Einwohner der Stadt nach 10 Wochen erkrankt sein werden. Geben Sie für die beiden Modelle jeweils eine Bedingung an das Verhalten der Einwohner der Stadt an, unter denen Ihnen das jeweilige Modell sinnvoll erscheint. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Es seien $a, b, t_0, x_0, x_1 \in \mathbb{R}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das AWP

$$x'' + ax' + bx = 0, \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = x_1 \tag{1}$$

lösbar ist und die Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ existiert. In dieser Aufgabe soll nun gezeigt werden, dass diese Lösung auch eindeutig ist. Dazu sei $J \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $t_0 \in J$ und x eine Lösung von (1) auf J

a) Begründen Sie, dass es reicht zu zeigen, dass die Lösung zu

$$x'' + ax' + bx = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad x'(t_0) = 0 \tag{2}$$

eindeutig ist. $\boxed{1}$

b) Zeigen Sie, dass jede Lösung von (1) beliebig oft differenzierbar ist. $\boxed{1}$

c) Zeigen Sie durch Induktion nach n: Für jedes kompakte Intervall $I \subset J$ gibt es Konstanten $C_1, C_2 > 0$ so dass für alle $t \in I$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\left| x^{(n)}(t) \right| \leq C_1 (2C_2)^n\,. \tag{3}$$

$\boxed{1}$

d) Zeigen Sie mit Hilfe von (3), dass die Taylorreihe der Lösung $x(t)$ von (1) um t_0 auf ganz J gegen $x(t)$ konvergiert. $\boxed{1}$

e) Begründen Sie mit Hilfe der Taylorentwicklung, dass die Lösung $x(t)$ von (2) die Nullfunktion ist. $\boxed{1}$