Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 01.06.2012

8. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren”

(Abgabe: Freitag, den 08.06.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

In dieser Übung sollen in Aufgabe 1 und 2 die qualitativ unterschiedlichen Verhaltensweisen eines schwingenden Systems am Beispiel des Federpendels untersucht werden. Dazu sei M ein Massenpunkt der Masse m, der an einer horizontalen Feder befestigt ist und sich horizontal längs einer Geraden bewegt. Ist M im Punkt 0, so sei die Feder ungespannt. Weiter sei $x(t)$ der gerichtete Abstand von M zu 0 und $v(t)$ die gerichtete Geschwindigkeit von M zur Zeit $t \geq 0$. Durch die Feder wirkt auf M eine Rückstellkraft $F_1 := -kx$, wobei $k > 0$ eine Federkonstante ist. Weiterhin werde M durch eine äußere Kraft $K(t)$, $t \geq 0$, angeregt und es wirkt die Reibungskraft $F_2 := -rx'$, wobei $r \geq 0$ eine Reibungskonstante ist. Die Bewegung des Massenpunktes wird dann beschrieben durch die DGl

$$mx'' = -rx' - kx + K(t)\ . \tag{1}$$

Es wird stets die Zeit t in Sekunden und die Auslenkung x in Meter und die Masse m in kg angegeben. (Zur Information: Die Standardeinheit der Kraft, das Newton, ist definiert als $1\text{N} = 1\frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{s^2}$)

Aufgabe 1: In dieser Aufgabe gelte $r = 0$, man spricht dann vom ungedämpften Fall, da die Reibung vernachlässigt wird. Weiterhin sei $m = 10$ (kg) und $k = 90$ (N/m).

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für den „freien“ Fall, $K(t) = 0$ mit den Anfangswerten $x(0) = 1$ und $v(0) = 0$. $\boxed{1}$

b) Nun werde das Pendel durch eine äußere Kraft der Form $K(t) = 10 \cdot \cos(6t)$ angeregt. Berechnen Sie die Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$. $\boxed{1}$

c) Dieselbe Aufgabenstellung wie in b) mit $K(t) = 10 \cdot \cos(3t)$. $\boxed{1}$

d) Vergleichen Sie das Verhalten der drei Lösungen aus den Aufgabenteilen a)-c). Plotten Sie dazu die Lösungen in dem Zeitintervall $t \in [\,0\,,\,10\,]$ z.B. mit dem freeware Programm *geogebra*. Erläutern Sie, warum man im Fall c) von der „Resonanzkatastrophe“ spricht. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Der Massenpunkt bewege sich nun in einem sehr viel zäheren Medium, so dass die Reibungskraft nicht mehr vernachlässigt werden kann. Wir gehen von einem Reibungskoeffizienten von $r = 5$ (Ns/m) aus. Weiterhin sei wieder $m = 10$ (kg), aber $k = 90{,}625$ (N/m).

a) Berechnen Sie die Lösung der Differentialgleichung für den „freien“ Fall $K(t) = 0$ mit den Anfangswerten $x(0) = 5$ und $v(0) = 0$. Plotten Sie die Lösung. $\boxed{2}$

b) Nun werde das Pendel durch eine äußere Kraft der Form $K(t) = 10 \cdot \cos(3t)$ angeregt. Berechnen Sie die Lösung zu den Anfangswerten $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$. Nutzen Sie ggf. Integraltafeln oder Comuterprogramme, um die länglichen Rechnungen zur Bestimmung von $c_1(t)$ und $c_2(t)$ abzukürzen. Plotten Sie auch diese Lösung und vergleichen Sie sie mit der Lösung aus Aufgabe 1 c). $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Ein Mittelklassewagen habe eine Masse von 820 kg. Jede Abfederung an seinen Rädern habe die Dämpfung $r = 1500$ Ns/m und die Steifigkeit $k = 15700$ N/m. Berechnen Sie die Schwingungsdauer $T = 2\pi/\beta$ und den Abklingfaktor e^{α} der gedämpften Schwingung. $\boxed{2}$

Aufgabe 4: Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung, bzw. die eindeutige Lösung der Anfangswertaufgabe:

a) $x'' - 3x' + 2x = t$ $\boxed{1}$

b) $x'' - 2x' + x = e^t\,, \quad x(0) = x'(0) = 0$ $\boxed{1}$

c) $x'' + x = \tan(t)\,, \quad x(0) = x'(0) = 1$ $\boxed{1}$