Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
S. Bauer
C. Hubacsek
C. Thiel

Essen, den 08.06.2012

9. Übung zur Vorlesung „Mathematisches Modellieren"

(Abgabe: Freitag, den 15.06.2012, bis 10.15 Uhr in die dafür vorgesehenen Kästen)

Aufgabe 1: Es sei die Situation aus Beispiel 3.13? (Hund und Frauchen) der Vorlesung gegeben. Frauchen bewegt sich also mit konstanter Geschwindigkeit $v > 0$, während der Hund sich mit einer Geschwindigkeit vom konstanten Betrag $w > 0$ in eine Richtung bewegt, die zu jedem Zeitpunkt zu Frauchen hin weist. Dabei befinden sich zur Zeit $t \geq 0$ Frauchen im Punkt $(vt, 0)$ und der Hund im Punkt $(x(t), y(t))$, wobei $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ mit $y_0 > 0$ sowie

$$\dot{x} = w \cdot \frac{vt - x}{\sqrt{(vt-x)^2 + y^2}} \quad \text{und} \quad \dot{y} = w \cdot \frac{-y}{\sqrt{(vt-x)^2 + y^2}} \quad \text{für } t \geq 0$$

gilt. Das Ziel ist es nun, die Funktion $x(t)$ implizit anzugeben.

a) Es sei $r(t) := \sqrt{(vt - x(t))^2 + y(t)^2}$ der Abstand zwischen Hund und Frauchen zur Zeit $t \geq 0$. Berechnen Sie $\dot{r}$ und zeigen Sie mit Hilfe der obigen Formeln für $\dot{x}$ und $\dot{y}$, dass $\dot{r}(t) = \frac{v}{w}\dot{x}(t) - w$ für $t \geq 0$ gilt. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie durch Integration der in Teil a) gezeigten Gleichung und Berücksichtigung der Bedingungen zur Zeit $t = 0$ eine Gleichung für $r(t)$, in der nur noch $x(t)$, aber nicht mehr $y(t)$, vorkommt. Bestimmen Sie dann eine Differentialgleichung für $x(t)$, indem Sie diese Gleichung für $r(t)$ in die Gleichung für $\dot{x}$ einsetzen. $\boxed{1}$

c) Es gelte $w > v > 0$. Lösen Sie die in Teil b) erhaltene Differentialgleichung für $x(t)$ und bestimmen Sie eine Gleichung für $x(t)$, in der keine Ableitungen oder Integrale mehr vorkommen. $\boxed{2}$

Aufgabe 2: Eine radioaktive Substanz A zerfalle mit der Halbwertszeit τ_A in eine Substanz B, die wiederum mit der Halbwertszeit τ_B in eine stabile Substanz C zerfalle. Bezeichnen $a(t)$, $b(t)$ und $c(t)$ die Stoffmengen von A, B und C zur Zeit $t \geq 0$, so entwickeln sie sich näherungsweise gemäß dem Differentialgleichungssystem

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a' &=& -\lambda_A \cdot a, \\ b' &=& -\lambda_B \cdot b + \lambda_A \cdot a, \\ c' &=& \lambda_B \cdot b, \end{array} \right.$$

wobei $\lambda_A := \frac{\ln 2}{\tau_A}$ und $\lambda_B := \frac{\ln 2}{\tau_B}$ gilt (siehe Beispiel V.1 der Vorlesung). Weiter gelte nun $a(0) = a_0 > 0$, $b(0) = b_0 \geq 0$, $c(0) = c_0 \geq 0$ sowie $\tau_A \neq \tau_B$.

a) Berechnen Sie $a(t)$, $b(t)$ und $c(t)$, $t \geq 0$, mit Hilfe der Gleichungen des Systems. $\boxed{2}$

b) Beschreiben Sie das Langzeitverhalten der Lösungen und interpretieren Sie das Ergebnis im Hinblick auf das zugrunde liegende Problem. $\boxed{1}$

Aufgabe 3: Wenn in einem Talkessel warme Luftschichten auf kalten Luftschichten liegen, spricht man von einer *Inversionswetterlage*. Der vertikale Luftaustausch ist dann weitgehend blockiert, so dass sich in den unteren Luftschichten Schadstoffe, darunter vor allem Schwefelwasserstoff H_2S und Schwefeldioxid SO_2, stark anreichern können. Die zur Zeit t vorhandene Menge an H_2S werde mit $m_1(t)$ und die Menge an SO_2 mit $m_2(t)$ bezeichnet. H_2S oxidiert mit einer bestimmten Rate k_1 zu SO_2 und SO_2 oxidiert mit der Rate k_2 zu einem Sulfat, das nicht weiter gesundheitschädlich ist. Es gelte $k_1 \neq k_2$. Die Emission durch Kraftwerke, Verkehr und Industrieanlagen in dem Talkessel werde durch die zeitlich konstanten Emissionsraten ϵ_1 für H_2S und ϵ_2 für SO_2 gegeben. (Diese Annahme ist zugegebenermaßen nicht sehr realistisch).

a) Stellen Sie ein Differentialgleichungssystem auf, dass die zeitliche Entwicklung der Mengen an Schwefelwasserstoff und Schwefeldioxid modelliert. $\boxed{1}$

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems. $\boxed{1}$

c) Bestimmen Sie das Langzeitverhalten dieser Lösungen und interpretieren Sie es im Sachzusammenhang. $\boxed{1}$

d) Geben Sie ein realistischeres Modell für die Emissionsraten an, in dem Sie annehmen, dass zwar die Kraftwerke und Industrieanlagen kontinuierlich mit der selben Rate emitieren, die Emissionsraten durch Verkehr aber die für einen Werktag typischen Variationen zeigen. Sie müssen also geeignete Funktionen $\epsilon_1(t)$ und $\epsilon_2(t)$ angeben. $\boxed{1}$

Aufgabe 4: Zur Festigung und Vertiefung: Bestimmen Sie die allgemeine Lösung, bzw. die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems:

a) $y' = -\frac{t}{y}\,, \quad y(1) = 1\,.$ $\boxed{1}$

b) $yt^2y' = e^y$ $\boxed{1}$

c) $y' = 2y + t^2e^{2t}$ $\boxed{1}$

d) $y'' + 2y' + 2y = \sin(2t)\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(0) = 0$ $\boxed{1}$