Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Winkler
C. Stinner

Essen, den 02.02.2009

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie für Lehramtsstudierende

Lösung

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50 von insgesamt 100 möglichen Punkten erreicht werden.
Runden Sie die Ergebnisse auf die dritte signifikante Dezimalstelle.

Aufgabe 1: Die 15 Gewinner eines Preisausschreibens einer Buchhandlung dürfen jeweils einmal ein Glücksrad drehen, das mit den Zahlen $1, 2, \ldots, 100$ beschriftet ist. Anschließend erhält jeder Gewinner ein Exemplar des Buches, das der am Glücksrad erzielten Zahl zugeordnet ist, wobei unterschiedlichen Zahlen am Glücksrad auch unterschiedliche Bücher zugeordnet sind. Es sei A das Ereignis „mindestens zwei der Gewinner erhalten das gleiche Buch".

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Stellen Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Mächtigkeit $|A|$ und die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Lösung:

a) Es sei $\Omega := \{1, 2, \ldots, 100\}^{15}$, wobei $(\omega_1, \ldots, \omega_{15}) \in \Omega$ bedeute, dass der i-te Gewinner am Glücksrad die Zahl ω_i erzielt ($i \in \{1, \ldots, 15\}$). Außerdem sei $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{100^{15}}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist (Ω, p) ein für die Situation geeignetes Laplace-Experiment. $\boxed{2}$

b) Als Teilmenge von Ω lässt sich das Ereignis A folgendermaßen darstellen:

$$A = \Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_{15}) \in \Omega \mid \text{es gibt } i, j \in \{1, \ldots, 15\} \text{ mit } i \neq j \text{ und } \omega_i = \omega_j\Big\}.$$

$\boxed{3}$

c) Ist $\bar{A}$ das Gegenereignis zu A, so gilt

$$\bar{A} = \Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_{15}) \in \Omega \mid \omega_i \neq \omega_j \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, 15\} \text{ mit } i \neq j\Big\}.$$

Es folgt $|\bar{A}| = 100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 86$, so dass

$$|A| = |\Omega| - |\bar{A}| = 100^{15} - 100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 86 \approx 6,69 \cdot 10^{29}$$

gilt. Da (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, folgt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 86}{100^{15}} \approx 1 - 0,331 = 0,669.$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 2: Installateur Meier hat drei Angestellte. Manfred erhält 20 Prozent, Norbert 30 Prozent und Otto 35 Prozent der Aufträge, und die übrigen Aufträge erledigt Herr Meier selbst. Bei Manfred sind 30 Prozent der Kunden zufrieden, bei Norbert 80 Prozent, bei Otto 75 Prozent und bei Herrn Meier 90 Prozent.

a) Wieviel Prozent aller Kunden sind zufrieden?

b) Eine Kunde ist zufrieden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Herr Meier den Auftrag des Kunden erledigt?

Lösung:

a) Es seien die Ereignisse A_1: „ein Auftrag wird durch Manfred erledigt", A_2: „ein Auftrag wird durch Norbert erledigt", A_3: „ein Auftrag wird durch Otto erledigt", A_4: „ein Auftrag wird durch Herr Meier erledigt" und B: „ein Kunde ist zufrieden" definiert.
Gesucht ist also $P(B)$. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:
$P(A_1) = 0,2$, $P(A_2) = 0,3$, $P(A_3) = 0,35$, $P(A_4) = 0,15$, $P(B|A_1) = 0,3$, $P(B|A_2) = 0,8$, $P(B|A_3) = 0,75$ und $P(B|A_4) = 0,9$.
Da $A_1, \ldots, A_4$ paarweise disjunkt sind, $P(A_i) > 0$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$ und $\sum_{i=1}^{4} P(A_i) = 1$ gilt, folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = 0,3 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0,3 + 0,75 \cdot 0,35 + 0,9 \cdot 0,15 \\ &= 0,6975 \approx 0,698. \end{aligned}$$

Also sind 69,8 Prozent aller Kunden zufrieden. $\boxed{5}$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_4|B)$. Nach dem Satz von Bayes und dem Ergebnis aus Teil a) gilt

$$P(A_4|B) = \frac{P(B|A_4) \cdot P(A_4)}{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{0,9 \cdot 0,15}{0,6975} = 0,1935 \cdots \approx 0,194.$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 3: Geben Sie eine Näherung für die Anzahl der Dezimalstellen der Zahl $\binom{10000}{1000}$ an.

Lösung:
Mit der Stirling'schen Formel gilt

$$\begin{aligned}\binom{10000}{1000} &= \frac{10000!}{1000!\cdot 9000!}\\ &\approx \frac{10000^{10000}\cdot e^{-10000}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 10000}}{1000^{1000}\cdot e^{-1000}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 1000}\cdot 9000^{9000}\cdot e^{-9000}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 9000}}\\ &= \frac{10000^{10000}\cdot 100}{1000^{1000}\cdot\sqrt{2\pi}\cdot 3000\cdot 9000^{9000}} = \frac{10^{40000}\cdot 10^2}{10^{3000}\cdot 3\cdot 10^3\cdot\sqrt{2\pi}\cdot 9^{9000}\cdot 10^{27000}}\\ &= \frac{10^{40002}}{10^{30003}\cdot 10^{\log_{10}(3\cdot\sqrt{2\pi})}\cdot 10^{9000\cdot\log_{10}(9)}} \approx 10^{9999}\cdot 10^{-0{,}876}\cdot 10^{-9000\cdot 0{,}9542425}\\ &\approx 10^{9999-0{,}876-8588{,}183}\approx 10^{9999-8589} = 10^{1410}.\end{aligned}$$

Also hat die Zahl $\binom{10000}{1000}$ ungefähr 1411 Stellen. $\boxed{10}$

Aufgabe 4: Bei einem Glücksspiel wird zunächst zweimal hintereinander ein idealer Würfel und anschließend einmal eine ideale Münze geworfen. Man erhält einen Punkt, wenn die Münze „Zahl" zeigt, und 0 Punkte, wenn die Münze „Kopf" zeigt. Addiert man zu dieser Punktzahl die Augensumme der beiden Würfelwürfe, so erhält man die Gesamtpunktzahl. Man gewinnt bei dem Spiel, wenn die Gesamtpunktzahl gerade ist. Weiter sei A das Ereignis „man gewinnt bei dem Spiel", B das Ereignis „die Augensumme der beiden Würfelwürfe ist mindestens 10" und C das Ereignis „die Münze zeigt Zahl".

a) Untersuchen Sie, ob A und B, ob A und C, ob B und C stochastisch unabhängig sind.

b) Untersuchen Sie, ob A, B, C stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

a) Es sei $\Omega := \{1,\dots,6\}^2\times\{0,1\}$ und $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6^2\cdot 2} = \frac{1}{72}$ für alle $\omega\in\Omega$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist. Dabei gibt für $(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega$ ω_1 die Augenzahl des ersten Würfelwurfes, ω_2 die Augenzahl des zweiten Würfelwurfes an und $\omega_3 = 1$ bedeutet „Münze zeigt Zahl" sowie $\omega_3 = 0$ „Münze zeigt Kopf". Dann gilt

$$\begin{aligned}A &= \left\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega \mid \sum_{i=1}^{3}\omega_i = 2n \text{ für ein } n\in\mathbb{N}\right\}\\ &= \{(i,j,1)\in\Omega \mid i+j \text{ ist ungerade}\}\cup\{(i,j,0)\in\Omega \mid i+j \text{ ist gerade}\},\\ B &= \left\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega \mid \omega_1+\omega_2\geq 10\right\},\\ C &= \left\{(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\Omega \mid \omega_3 = 1\right\}.\end{aligned}$$

Somit folgt

$$P(A) = \frac{18+18}{72} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{6 \cdot 2}{72} = \frac{1}{6},\ P(C) = \frac{36}{72} = \frac{1}{2}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
A \cap B &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 \geq 10 \text{ und } \sum_{i=1}^{3} \omega_i \text{ ist gerade}\Big\} \\
&= \Big\{(5,5,0), (6,4,0), (4,6,0), (6,5,1), (5,6,1), (6,6,0)\Big\}, \\
A \cap C &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, 1) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 \text{ ist ungerade}\Big\}, \\
B \cap C &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, 1) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 \geq 10\Big\}.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= \frac{6}{72} = \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(B), \\
P(A \cap C) &= \frac{18}{72} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C), \\
P(B \cap C) &= \frac{6}{72} = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C).
\end{aligned}$$

Somit sind A und B stochastsich unabhängig, A und C stochastisch unabhängig sowie B und C stochastisch unabhängig. $\boxed{6}$

b) Es gilt

$$A \cap B \cap C = \Big\{(6,5,1), (5,6,1)\Big\},$$

so dass folgt

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{72} = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Daher sind A, B, C nicht stochastisch unabhängig. $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Eine Firma behauptet, dass mindestens 80 Prozent der Bevölkerung ihr Produkt kennen. In einer Umfrage unter 1000 Personen kennen 769 das Produkt.

a) Es sei angenommen, dass 80 Prozent der Bevölkerung das Produkt kennen. Bestimmen Sie ein möglichst großes $k \in \mathbb{N}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Personen höchstens k das Produkt kennen, maximal 5 Prozent beträgt.

b) Wie ist die Behauptung der Firma, dass mindestens 80 Prozent der Bevölkerung das Produkt kennen, mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil a) zu bewerten?

<u>Lösung:</u>

a) Es sei angenommen, dass 80 Prozent der Bevölkerung das Produkt kennen. Weiter sei X die Zufallsgröße, die angibt, wie viele Personen bei einer Umfrage unter 1000 Personen das Produkt kennen. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n := 1000$ und $p := 0,8$, also $P^X = B_{n,p}$. Somit gilt nach der Näherungsformel von De Moivre - Laplace für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \leq \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \leq \frac{k - 800}{\sqrt{160}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int\limits_{i\infty}^{\frac{k-800}{\sqrt{160}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\ &= \Phi\left(\frac{k-800}{\sqrt{160}}\right). \end{aligned}$$

Damit $P(X \leq k) \leq 0,05$ ist, muss also $\Phi\left(\frac{k-800}{\sqrt{160}}\right) \leq 0,05$ gelten. Wegen $\Phi(t) \leq 0,05$ für $t \leq -1,66$ muss also $\frac{k-800}{\sqrt{160}} \leq -1,66$ gelten. Dies ist für $k \leq 800 - 1,66 \cdot \sqrt{160} \approx 779,00$ erfüllt. Somit ist $k = 779$ das mit der verwendeten Näherung maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass $P(X \leq k) \leq 0,05$ gilt. $\boxed{7}$

b) Da in der Umfrage nur 769 Personen das Produkt kennen und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 Prozent höchstens 779 Personen von 1000 Personen das Produkt kennen würden, wenn die Behauptung der Firma stimmen würde, ist es wahrscheinlich, dass die Behauptung nicht stimmt. Man kann aber nicht definitiv sagen, ob die Behauptung der Firma stimmt oder nicht. $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Es sei (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen, für die $E(X^2)$ und $E(Y^2)$ existieren sowie $Var(X) > 0$ und $Var(Y) > 0$ gilt. Weiter gelte $E((X+Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2)$ sowie $E(Y) = 0$. Beweisen Sie, dass X und Y unkorreliert sind.

Lösung:

Wegen $|X(\omega)| \leq 1 + X^2(\omega)$, $|Y(\omega)| \leq 1 + Y^2(\omega)$, $|(X \cdot Y)(\omega)| \leq X^2(\omega) + Y^2(\omega)$ und $|(X+Y)^2(\omega)| \leq 2X^2(\omega) + 2Y^2(\omega)$ existieren $E(X)$, $E(Y)$, $E(X \cdot Y)$ und $E((X+Y)^2)$ sowie $Var(X)$ und $Var(Y)$, da $E(X^2)$ und $E(Y^2)$ existieren.
Es gilt nach den Rechenregeln für Erwartungswerte

$$E((X+Y)^2) = E(X^2 + 2\,X \cdot Y + Y^2) = E(X^2) + 2 \cdot E(X \cdot Y) + E(Y^2).$$

Also gilt nach Voraussetzung

$$E(X^2) + 2 \cdot E(X \cdot Y) + E(Y^2) = E(X^2) + E(Y^2),$$

woraus $E(X \cdot Y) = 0$ folgt. Somit gilt

$$Cov(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0 - E(X) \cdot 0 = 0.$$

Daher sind X und Y unkorreliert, da

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} = 0$$

folgt. $\boxed{10}$

Aufgabe 7: Ein idealer Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. In Spiel 1 zahlt man 1 Euro Einsatz, und man bekommt 3 Euro ausgezahlt, wenn die Augensumme durch drei teilbar ist. In Spiel 2 zahlt man 2 Euro Einsatz, und man bekommt 20 Euro ausgezahlt, wenn das Produkt der Augenzahlen mindestens 25 beträgt. Für $i \in \{1,2\}$ gebe die Zufallsgröße X_i „Auszahlung minus Einsatz" bei Spiel i an.

a) Geben Sie ein geeignetes diskretes Zufallsexperiment (Ω, p) sowie die Abbildungen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \{1,2\}$, an.

b) In Spiel 3 wird zunächst einmal Spiel 1 und danach einmal Spiel 2 gespielt. Die Zufallsgröße Z gebe „Auszahlung minus Einsatz" bei Spiel 3 an. Stellen Sie Z mit Hilfe der Zufallsgrößen X_1 und X_2 dar und berechnen Sie den Erwartungswert $E(Z)$.

<u>Lösung:</u>

a) Es sei $\Omega := \{1,\dots,6\}^2$ und $p(\omega) := \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist. Dann ist (Ω, p) ein geeignetes diskretes Zufallsexperiment. Weiter gilt

$$X_1 : \Omega \to \mathbb{R},\ X_1((i,j)) = \begin{cases} 2, & \text{falls } i+j \in \{3,6,9,12\}, \\ -1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$X_2 : \Omega \to \mathbb{R},\ X_2((i,j)) = \begin{cases} 18, & \text{falls } i \cdot j \in \{25,30,36\}, \\ -2, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$\boxed{3}$

b) Es gilt

$$Z : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R},\ Z((\omega_1,\omega_2)) = X_1(\omega_1) + X_2(\omega_2),$$

wobei für $(\omega_1,\omega_2) \in \Omega \times \Omega$ ω_1 das Ergebnis von Spiel 1 und ω_2 das Ergebnis von

Spiel 2 ist und $(\Omega \times \Omega, \tilde{p})$ das zugehörige Laplace-Experiment sei. Es gilt also

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\times\Omega} (X_1(\omega_1) + X_2(\omega_2)) \cdot \tilde{p}((\omega_1,\omega_2)) \\
&= \sum_{\omega_1,\in\Omega}\sum_{\omega_2\in\Omega} X_1(\omega_1) \cdot \frac{1}{36^2} + \sum_{\omega_1,\in\Omega}\sum_{\omega_2\in\Omega} X_2(\omega_2) \cdot \frac{1}{36^2} \\
&= \sum_{\omega_1,\in\Omega} 36 \cdot X_1(\omega_1) \cdot \frac{1}{36^2} + \sum_{\omega_2,\in\Omega} 36 \cdot X_2(\omega_2) \cdot \frac{1}{36^2} \\
&= \sum_{\omega_1,\in\Omega} X_1(\omega_1) \cdot \frac{1}{36} + \sum_{\omega_2,\in\Omega} X_2(\omega_2) \cdot \frac{1}{36} \\
&= \sum_{\omega_1,\in\Omega} X_1(\omega_1) \cdot p(\omega_1) + \sum_{\omega_2,\in\Omega} X_2(\omega_2) \cdot p(\omega_2) \\
&= E(X_1) + E(X_2).
\end{aligned}$$

Weiter gilt

$$E(X_1) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot P(X_1 = x) = 2 \cdot P(X_1 = 2) + (-1) \cdot P(X_1 = -1) = 2 \cdot \frac{12}{36} - 1 \cdot \frac{24}{36} = 0$$

und

$$\begin{aligned}
E(X_2) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x \cdot P(X_2 = x) = 18 \cdot P(X_2 = 18) + (-2) \cdot P(X_1 = -2) \\
&= 18 \cdot \frac{4}{36} - 2 \cdot \frac{32}{36} = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \approx 0,222.
\end{aligned}$$

Somit folgt

$$E(Z) = E(X_1) + E(X_2) = 0 + \frac{2}{9} \approx 0,222.$$

$\boxed{7}$

Aufgabe 8: Man brauche 20 Personen, um einen Faustballverein gründen zu können. Außerdem sei in der Bevölkerung jeder Zehntausendste an Faustball interessiert. Es sei A das Ereignis „in einer Stadt mit 300 000 Einwohnern leben genügend viele an Faustball interessierte Personen, um einen Faustballverein gründen zu können".

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ exakt an.

b) Berechnen Sie einen Näherungswert für $P(A)$.

Lösung:

a) Es sei X die Zufallsgröße, die die Anzahl der an Faustball interessierten Personen in einer Stadt mit 300 000 Einwohnern angibt. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n := 300000$ und $p := \frac{1}{10000}$. Somit gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \geq 20) = \sum_{k=20}^{300000} B_{n,p}(k) \\ &= \sum_{k=20}^{300000} \binom{300000}{k} \cdot \left(\frac{1}{10000}\right)^k \cdot \left(\frac{9999}{10000}\right)^{300000-k}. \end{aligned}$$

$\boxed{4}$

b) Mit der Näherungsformel von De Moivre - Laplace gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \geq 20) = P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \geq \frac{20 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \geq \frac{20 - 30}{\sqrt{29,997}}\right) \\ &\approx P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \geq -1,82\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-1,82}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\ &= 1 - \Phi(-1,82) = 1 - (1 - \Phi(1,82)) = \Phi(1,82) = 0,9656. \end{aligned}$$

$P(A)$ beträgt also ungefähr $96,6$ Prozent. $\boxed{6}$

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

Wenn nichts anderes angegeben ist, sei stets (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße sowie $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

		wahr	falsch
1.	Ω ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.		X
2.	Ist $P(B) < P(A)$, so folgt $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.		X
3.	Gilt $0 < P(A) < P(B) < 1$, so folgt $P(A\|B) \leq P(B\|A)$.	X	
4.	Es gelte $0 < P(A) < 1$ sowie $P(B\|A) > P(C\|A)$ und $P(B\|\bar{A}) > P(C\|\bar{A})$. Dann folgt $P(B) > P(C)$.	X	
5.	Ist (Ω, p) ein Laplace-Experiment, so existiert $Var(X)$.	X	
6.	In einer Urne befinden sich 10 schwarze und 6 weiße Kugeln. Zieht man mit einem Griff 5 Kugeln heraus, so hat man dabei durchschnittlich $3,25$ schwarze Kugeln gezogen.		X
7.	Wartet man, ausgehend von einem beliebigen Startzeitpunkt, bis die Zahl 17 in einer Ziehung beim Lotto „6 aus 49" gezogen wird, so muss man durchschnittlich mehr als 7 Ziehungen warten.	X	
8.	Es gilt $\binom{1000}{500} > \binom{2000}{1000}$.		X
9.	Sind A und B stochastisch unabhängig sowie B und C stochastisch unabhängig, so sind auch A und C stochastisch unabhängig.		X
10.	Gilt $P(X \geq 0) = 1$, so folgt $E(X^2) \geq E(X)$.		X

Erläuterungen:

1. Gegenbeispiel: (Ω, p) mit $\Omega := \mathbb{R}$ und $p(0) := 1$, $p(x) := 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. Gegenbeispiel: $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{4, 5\}$.
3. Beweis: Wegen $0 < P(A) < P(B) < 1$ folgt $\frac{1}{P(A)} > \frac{1}{P(B)}$. Wegen $P(A \cap B) \geq 0$ folgt
$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \geq \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A|B).$$
4. Beweis: Wegen $0 < P(A) < 1$ gilt auch $0 < P(\bar{A}) < 1$. Somit folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) > P(C|A) \cdot P(A) + P(C|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = P(C).$$
5. Ist (Ω, p) ein Laplace-Experiment, so ist Ω eine endliche Menge und daher existiert $Var(X)$.

6. Die Zufallsgröße, die die Anzahl der schwarzen Kugeln angibt, hat als Wahrscheinlichkeitsverteilung die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern $n := 5$ (Anzahl der gezogenen Kugeln), $N := 16$ (Anzahl der Kugeln in der Urne) und $K := 10$ (Anzahl der schwarzen Kugeln in der Urne). Als Erwartungswert ergibt sich $n \cdot \frac{K}{N} = 5 \cdot \frac{10}{16} = \frac{25}{8} = 3,125$.

7. In jeder Ziehung wird die Zahl 17 mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{49}$ gezogen. Also erwartet man die erste 17 durchschnittlich nach $\frac{49}{6}$ Ziehungen (negative Binomialverteilung).

8. Es gilt

$$\begin{aligned}\binom{2000}{1000} &= \frac{2000 \cdot 1999 \cdot \ldots \cdot 1001}{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 1} \\ &= \frac{2000 \cdot 1999 \cdot \ldots \cdot 1501}{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 501} \cdot \frac{1500 \cdot 1499 \cdot \ldots \cdot 1001}{500 \cdot 499 \cdot \ldots \cdot 1} \\ &> 1 \cdot \frac{1000 \cdot 999 \cdot \ldots \cdot 501}{500 \cdot 499 \cdot \ldots \cdot 1} = \binom{1000}{500}.\end{aligned}$$

9. Gegenbeispiel: Sei $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$, (Ω, p) ein Laplace-Experiment, $B := \emptyset$, $A := \{1\}$ und $C := \{2\}$.

10. Gegenbeispiel: Sei $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$, (Ω, p) ein Laplace-Experiment und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(\omega) := \frac{1}{2}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $P(X \geq 0) = 1$, $E(X) = \frac{1}{2} \cdot P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ sowie $E(X^2) = \frac{1}{4} \cdot P(X = \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.