Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. M. Winkler
C. Stinner

Essen, den 02.02.2009

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie für Lehramtsstudierende

Bearbeitungszeit 120 min.

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50 von insgesamt 100 möglichen Punkten erreicht werden.
Runden Sie die Ergebnisse auf die dritte signifikante Dezimalstelle.

Aufgabe 1: Die 15 Gewinner eines Preisausschreibens einer Buchhandlung dürfen jeweils einmal ein Glücksrad drehen, das mit den Zahlen $1, 2, \dots, 100$ beschriftet ist. Anschließend erhält jeder Gewinner ein Exemplar des Buches, das der am Glücksrad erzielten Zahl zugeordnet ist, wobei unterschiedlichen Zahlen am Glücksrad auch unterschiedliche Bücher zugeordnet sind. Es sei A das Ereignis „mindestens zwei der Gewinner erhalten das gleiche Buch".

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p). $\boxed{2}$

b) Stellen Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar. $\boxed{3}$

c) Berechnen Sie die Mächtigkeit $|A|$ und die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Installateur Meier hat drei Angestellte. Manfred erhält 20 Prozent, Norbert 30 Prozent und Otto 35 Prozent der Aufträge, und die übrigen Aufträge erledigt Herr Meier selbst. Bei Manfred sind 30 Prozent der Kunden zufrieden, bei Norbert 80 Prozent, bei Otto 75 Prozent und bei Herrn Meier 90 Prozent.

a) Wieviel Prozent aller Kunden sind zufrieden? $\boxed{5}$

b) Eine Kunde ist zufrieden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat Herr Meier den Auftrag des Kunden erledigt? $\boxed{5}$

Aufgabe 3: Geben Sie eine Näherung für die Anzahl der Dezimalstellen der Zahl $\binom{10000}{1000}$ an. $\boxed{10}$

Aufgabe 4: Bei einem Glücksspiel wird zunächst zweimal hintereinander ein idealer Würfel und anschließend einmal eine ideale Münze geworfen. Man erhält einen Punkt, wenn die Münze „Zahl" zeigt, und 0 Punkte, wenn die Münze „Kopf" zeigt. Addiert man zu dieser Punktzahl die Augensumme der beiden Würfelwürfe, so erhält man die

Gesamtpunktzahl. Man gewinnt bei dem Spiel, wenn die Gesamtpunktzahl gerade ist. Weiter sei A das Ereignis „man gewinnt bei dem Spiel”, B das Ereignis „die Augensumme der beiden Würfelwürfe ist mindestens 10” und C das Ereignis „die Münze zeigt Zahl”.

a) Untersuchen Sie, ob A und B, ob A und C, ob B und C stochastisch unabhängig sind. $\boxed{6}$

b) Untersuchen Sie, ob A, B, C stochastisch unabhängig sind. $\boxed{4}$

Aufgabe 5: Eine Firma behauptet, dass mindestens 80 Prozent der Bevölkerung ihr Produkt kennen. In einer Umfrage unter 1000 Personen kennen 769 das Produkt.

a) Es sei angenommen, dass 80 Prozent der Bevölkerung das Produkt kennen. Bestimmen Sie ein möglichst großes $k \in \mathbb{N}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass von 1000 Personen höchstens k das Produkt kennen, maximal 5 Prozent beträgt. $\boxed{7}$

b) Wie ist die Behauptung der Firma, dass mindestens 80 Prozent der Bevölkerung das Produkt kennen, mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil a) zu bewerten? $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Es sei (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen, für die $E(X^2)$ und $E(Y^2)$ existieren sowie $Var(X) > 0$ und $Var(Y) > 0$ gilt. Weiter gelte $E((X+Y)^2) = E(X^2) + E(Y^2)$ sowie $E(Y) = 0$. Beweisen Sie, dass X und Y unkorreliert sind. $\boxed{10}$

Aufgabe 7: Ein idealer Würfel wird zweimal hintereinander geworfen. In Spiel 1 zahlt man 1 Euro Einsatz, und man bekommt 3 Euro ausgezahlt, wenn die Augensumme durch drei teilbar ist. In Spiel 2 zahlt man 2 Euro Einsatz, und man bekommt 20 Euro ausgezahlt, wenn das Produkt der Augenzahlen mindestens 25 beträgt. Für $i \in \{1, 2\}$ gebe die Zufallsgröße X_i „Auszahlung minus Einsatz” bei Spiel i an.

a) Geben Sie ein geeignetes diskretes Zufallsexperiment (Ω, p) sowie die Abbildungen $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$, $i \in \{1, 2\}$, an. $\boxed{3}$

b) In Spiel 3 wird zunächst einmal Spiel 1 und danach einmal Spiel 2 gespielt. Die Zufallsgröße Z gebe „Auszahlung minus Einsatz” bei Spiel 3 an. Stellen Sie Z mit Hilfe der Zufallsgrößen X_1 und X_2 dar und berechnen Sie den Erwartungswert $E(Z)$. $\boxed{7}$

Aufgabe 8: Man brauche 20 Personen, um einen Faustballverein gründen zu können. Außerdem sei in der Bevölkerung jeder Zehntausendste an Faustball interessiert. Es sei A das Ereignis „in einer Stadt mit 300 000 Einwohnern leben genügend viele an Faustball interessierte Personen, um einen Faustballverein gründen zu können”.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ exakt an. $\boxed{4}$

b) Berechnen Sie einen Näherungswert für $P(A)$. $\boxed{6}$

Das Wahrscheinlichkeitstheorie-Team wünscht viel Erfolg!

Name:
Matr.-Nr.:

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

Wenn nichts anderes angegeben ist, sei stets (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment, $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße sowie $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

		wahr	falsch
1.	Ω ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.		
2.	Ist $P(B) < P(A)$, so folgt $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$.		
3.	Gilt $0 < P(A) < P(B) < 1$, so folgt $P(A\|B) \leq P(B\|A)$.		
4.	Es gelte $0 < P(A) < 1$ sowie $P(B\|A) > P(C\|A)$ und $P(B\|\bar{A}) > P(C\|\bar{A})$. Dann folgt $P(B) > P(C)$.		
5.	Ist (Ω, p) ein Laplace-Experiment, so existiert $Var(X)$.		
6.	In einer Urne befinden sich 10 schwarze und 6 weiße Kugeln. Zieht man mit einem Griff 5 Kugeln heraus, so hat man dabei durchschnittlich $3,25$ schwarze Kugeln gezogen.		
7.	Wartet man, ausgehend von einem beliebigen Startzeitpunkt, bis die Zahl 17 in einer Ziehung beim Lotto „6 aus 49” gezogen wird, so muss man durchschnittlich mehr als 7 Ziehungen warten.		
8.	Es gilt $\binom{1000}{500} > \binom{2000}{1000}$.		
9.	Sind A und B stochastisch unabhängig sowie B und C stochastisch unabhängig, so sind auch A und C stochastisch unabhängig.		
10.	Gilt $P(X \geq 0) = 1$, so folgt $E(X^2) \geq E(X)$.		

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	$\sum$