UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN
FACHBEREICH MATHEMATIK
PROF. DR. M. WINKLER
C. STINNER

Essen, den 15.04.2009

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie für Lehramtsstudierende

Lösung

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50 von insgesamt 100 möglichen Punkten erreicht werden. Runden Sie die Ergebnisse auf die dritte signifikante Dezimalstelle.

Aufgabe 1: Bei einer Wahl erhält Partei A 40 Prozent, Partei B 35 Prozent und Partei C 10 Prozent der Stimmen. Der Anteil der Erstwähler beträgt innerhalb der Gruppe der Wähler von Partei A 3 Prozent, innerhalb der Gruppe der Wähler von Partei B 2 Prozent, innerhalb der Gruppe der Wähler von Partei C 30 Prozent und innerhalb der Gruppe der Wähler der anderen Parteien 20 Prozent.

a) Wieviel Prozent der Wähler sind Erstwähler?

b) Wieviel Prozent der Erstwähler haben Partei A gewählt?

Lösung:

a) Es seien die Ereignisse A_1: „ein Wähler wählt Partei A”, A_2: „ein Wähler wählt Partei B”, A_3: „ein Wähler wählt Partei C”, A_4: „ein Wähler wählt eine andere Partei” und B: „ein Wähler ist Erstwähler” definiert.
Gesucht ist also $P(B)$. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:
$P(A_1) = 0,4$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,1$, $P(A_4) = 0,15$, $P(B|A_1) = 0,03$, $P(B|A_2) = 0,02$, $P(B|A_3) = 0,3$ und $P(B|A_4) = 0,2$.
Da $A_1, \dots, A_4$ paarweise disjunkt sind, $P(A_i) > 0$ für $i \in \{1, \dots, 4\}$ und $\sum_{i=1}^4 P(A_i) = 1$ gilt, folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{4} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = 0,03 \cdot 0,4 + 0,02 \cdot 0,35 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,2 \cdot 0,15 \\ &= 0,079. \end{aligned}$$

Also sind $7,9$ Prozent der Wähler Erstwähler. $\boxed{5}$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_1|B)$. Nach dem Satz von Bayes und dem Ergebnis aus Teil a) gilt

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{4} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{0,03 \cdot 0,4}{0,079} = 0,1518 \cdots \approx 0,152.$$

Also haben $15,2$ Prozent der Erstwähler Partei A gewählt. $\boxed{5}$

Aufgabe 2: Ein idealer Würfel werde dreimal hintereinander geworfen. Es seien die Ereignisse A: „das Produkt der Augenzahlen ist 15”, B: „die Augensumme der ersten beiden Würfe ist gerade” und C: „die Augensumme der drei Würfe ist ungerade” definiert. Untersuchen Sie, ob B und C, ob A und $B \cap C$, ob $A \cup B$ und $B \cup C$ stochastisch unabhängig sind.

Lösung:
Es sei $\Omega := \{1, \dots, 6\}^3$ und $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ für alle $\omega \in \Omega$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist. Dabei gibt für $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ und $i \in \{1, 2, 3\}$ ω_i die Augenzahl des i-ten Würfelwurfes an. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
A &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 = 15\Big\} \\
&= \Big\{(1,3,5), (1,5,3), (3,1,5), (3,5,1), (5,1,3), (5,3,1)\Big\}, \\
B &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\Big\}, \\
C &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i = 2n - 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\Big\}, \\
B \cap C &= \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 2n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } \omega_3 \in \{1,3,5\}\Big\}, \\
A \cup B &= B, \\
B \cup C &= \Omega \setminus \Big\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 2n - 1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ und } \omega_3 \in \{1,3,5\}\Big\}.
\end{aligned}$$

Somit folgt $P(A) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}$, $P(B) = \frac{18 \cdot 6}{216} = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$, $P(B \cap C) = \frac{18 \cdot 3}{216} = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = P(B) = \frac{1}{2}$ und $P(B \cup C) = 1 - \frac{18 \cdot 3}{216} = \frac{3}{4}$.
Also gilt:

$$\begin{aligned}
P(B \cap C) &= \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C), \\
P(A \cap (B \cap C)) &= P(A) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B \cap C), \\
P((A \cup B) \cap (B \cup C)) &= P(B \cap (B \cup C)) = P(B) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = P(A \cup B) \cdot P(B \cup C).
\end{aligned}$$

Daher sind B und C stochastisch unabhängig, A und $B \cap C$ nicht stochastisch unabhängig sowie $A \cup B$ und $B \cup C$ nicht stochastisch unabhängig. $\boxed{10}$

Aufgabe 3: In einem Verein stehen für die Ausübung eines Amtes 30 Kandidaten zur Verfügung. Für jedes Jahr wird eine Liste ausgelost und jedem der Kandidaten eine Zahl zwischen 1 und 30 - sein Listenplatz - zugeordnet, so dass jede solche Zahl genau einmal vergeben wird. Es werden nun die beiden Listen für die Jahre 2010 und 2011 ausgelost. Herr Meier ist einer der Kandidaten. Weiter sei A das Ereignis „Herr Meier bekommt mindestens einmal einen Listenplatz größer als 25”.

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Stellen Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Lösung:

a) Es sei $M := \Big\{(m_1,\dots,m_{30}) \in \{1,\dots,30\}^{30} | \{m_1,\dots,m_{30}\} = \{1,\dots,30\}\Big\}$,

$$\Omega := \Big\{(a_1,\dots,a_{30},b_1,\dots,b_{30}) \,|\, (a_1,\dots,a_{30}) \in M, (b_1,\dots,b_{30}) \in M\Big\}$$

und $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{|M|^2} = \frac{1}{(30!)^2}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dabei seien die 30 Kandidaten mit den Nummern 1 bis 30 nummeriert und für $(a_1,\dots,a_{30},b_1,\dots,b_{30}) \in \Omega$ gebe a_i den Listenplatz von Kandidat i im Jahr 2010 und b_i den Listenplatz von Kandidat i im Jahr 2011 für $i \in \{1,\dots,30\}$ an. Weiter sei Herr Meier der Kandidat 1, so dass a_1 und b_1 seine Listenplätze angeben. Somit ist (Ω, p) ein geeignetes Laplace-Experiment. $\boxed{3}$

b) Als Teilmenge von Ω lässt sich das Ereignis A folgendermaßen darstellen:

$$A = \Big\{(a_1,\dots,a_{30},b_1,\dots,b_{30}) \in \Omega \,|\, \{a_1,b_1\} \cap \{26,\dots,30\} \neq \emptyset\Big\}.$$

$\boxed{2}$

c) Es gilt

$$\bar{A} = \Big\{(a_1,\dots,a_{30},b_1,\dots,b_{30}) \in \Omega \,|\, a_1,b_1 \in \{1,\dots,25\}\Big\}.$$

Daher gilt $|\bar{A}| = (25 \cdot 29!)^2$, da man 25 Möglichkeiten hat, um a_1 zu wählen und anschließend 29! Möglichkeiten hat, um $a_2,\dots,a_{30}$ zu wählen sowie analog 25 Möglichkeiten, um b_1 zu wählen und 29! Möglichkeiten, um $b_2,\dots,b_{30}$ zu wählen. Da (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{|\bar{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(25 \cdot 29!)^2}{(30!)^2} = 1 - \left(\frac{25 \cdot 29!}{30 \cdot 29!}\right)^2 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36} = 0,30\bar{5} \approx 0,306. \end{aligned}$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 4: Es sei (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Zufallsgröße, für die $E(X^4)$ existiert, $Var(X) > 0$, $Var(X^2) > 0$ gilt sowie $P(X^{-1}(\{x\})) = P(X^{-1}(\{-x\}))$ für alle $x > 0$ erfüllt ist. Beweisen Sie, dass X und X^2 unkorreliert sind.

Lösung:

Da $E(X^4)$ existiert, existieren nach dem Majorantenkriterium Lemma 4.21 auch $E(X)$, $E(X^2)$ und $E(X^3)$, denn es gilt $|X^k(\omega)| \leq 1 + |X^4(\omega)|$ für alle $\omega \in \Omega$ und $k \in \{1,2,3\}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})) = \sum_{x>0} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x<0} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})) \\ &= \sum_{x>0} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x<0} x \cdot P(X^{-1}(\{-x\})) \\ &= \sum_{x>0} x \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x>0} -x \cdot P(X^{-1}(\{x\})) = 0 \end{aligned}$$

und analog mit Satz 4.18

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \sum_{x\in\mathbb{R}} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) = \sum_{x>0} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x<0} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) \\ &= \sum_{x>0} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x<0} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{-x\})) \\ &= \sum_{x>0} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x>0} (-x)^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) \\ &= \sum_{x>0} x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) + \sum_{x>0} -x^3 \cdot P(X^{-1}(\{x\})) = 0. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$Cov(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot E(X^2) = E(X^3) - E(X) \cdot E(X^2) = 0 - 0 \cdot E(X^2) = 0.$$

Wegen $Var(X) > 0$ und $Var(X^2) > 0$ gilt also

$$\rho(X, X^2) = \frac{Cov(X, X^2)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(X^2)}} = 0,$$

so dass X und X^2 unkorreliert sind. $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Der Bürgermeister einer Stadt behauptet, dass mindestens 75 Prozent der Einwohner den Bau einer neuen Brücke befürworten. Diese Behauptung sei die Nullhypothese H_0.

a) Formulieren Sie die Gegenhypothese H_1 bezüglich H_0 und bestimmen Sie für eine Umfrage unter 1000 Personen eine Entscheidungsregel δ, so dass H_0 auf Basis des Signifikanzniveaus 0,05 verworfen wird.

b) In einer Umfrage unter 1000 Personen befürworten 700 den Bau einer neuen Brücke. Wie ist H_0 auf der Basis der Entscheidungsregel δ zu bewerten?

Lösung:

a) Die Gegenhypothese H_1 bezüglich H_0 lautet „weniger als 75 Prozent der Einwohner befürworten den Bau einer neuen Brücke".
Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der Personen in einer Umfrage unter 1000 Personen an, die den Bau einer neuen Brücke befürworten. Dabei wird angenommen, dass eine Person mit der Wahrscheinlichkeit $p := 0,75$ den Bau einer neuen Brücke befürwortet. Da die Hypothese H_0 auf Basis des Signifikanzniveaus 0,05 verworfen werden soll, muss nun $k \in \mathbb{N}_0$ so bestimmt werden, dass $P_{0,75}(X \leq k) \approx 0,05$ gilt. Es gilt mit der Näherungsformel von De Moivre - Laplace für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} P_{0,75}(X \leq k) &= P_{0,75}\left(\frac{X - 1000 \cdot p}{\sqrt{1000 \cdot p \cdot (1-p)}} \leq \frac{k - 1000 \cdot p}{\sqrt{1000 \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &= P_{0,75}\left(\frac{X - 750}{\sqrt{187,5}} \leq \frac{k - 750}{\sqrt{187,5}}\right) \\ &\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{k-750}{\sqrt{187,5}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = \Phi\left(\frac{k-750}{\sqrt{187,5}}\right). \end{aligned}$$

Also muss $\Phi(\frac{k-750}{\sqrt{187,5}}) \approx 0,05$ gelten. Da $\Phi(t) \approx 0,05$ für $t = -1.64$ gilt, folgt $k \approx 750 - 1,64 \cdot \sqrt{187,5} \approx 727,54$. Somit kann man die Entscheidungsregel δ definieren durch

$$\delta(x) := \begin{cases} H_0, & \text{falls } x \geq 728, \\ H_1, & \text{falls } x \leq 727, \end{cases}$$

so dass die Hypothese H_0 durch δ auf Basis des Signifikanzniveaus 0,05 verworfen wird. $\boxed{7}$

b) Wegen $\delta(700) = H_1$ wird H_0 auf der Basis von δ verworfen. Somit ist es im Bezug auf die Stichprobe recht wahrscheinlich, dass die Hypothese H_0 nicht stimmt, aber man kann nicht definitv sagen, ob H_0 stimmt oder nicht. $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 Prozent 10 Euro, mit doppelt so großer Wahrscheinlichkeit 3 Euro, mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 Prozent 1 Euro und sonst nichts. Die Zufallsgröße X_0 beschreibe den bei einem Spiel erzielten Gewinn, die Zufallsgröße $X^{(n)}$ den bei $n \geq 2$ unabhängig voneinander durchgeführten Spielen erreichten durchschnittlichen Gewinn pro Spiel.

a) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X_0 und $X^{(n)}$, wobei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ beliebig sei.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung ein möglichst kleines Intervall, in dem $X^{(100)}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 Prozent liegt.

Lösung:

a) Es gilt

$$\begin{aligned} E(X_0) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X_0 = x) = 10 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,2 + 1 \cdot 0,4 + 0 \cdot 0,3 = 2, \\ E(X_0^2) &= \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 \cdot P(X_0 = x) = 10^2 \cdot 0,1 + 3^2 \cdot 0,2 + 1^2 \cdot 0,4 + 0^2 \cdot 0,3 \\ &= 10 + 1,8 + 0,4 = 12,2. \end{aligned}$$

Also folgt

$$Var(X_0) = E(X_0^2) - (E(X_0))^2 = 12,2 - 4 = 8,2.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und es werden n Spiele unabhängig voneinander durchgeführt. Dabei sei Y_i für $i \in \{1, \ldots, n\}$ die Zufallsgröße, die den im i-ten Spiel erzielten Gewinn angibt. Daher sind $Y_1, \ldots, Y_n$ stochastisch unabhängig und identisch verteilt, so dass $E(Y_i) = E(X_0)$ und $Var(Y_i) = Var(X_0)$ gilt. Da außerdem $X^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$ gilt, folgt nach 4.20, 4.32 und 4.39 nun

$$\begin{aligned} E(X^{(n)}) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{1}{n} \cdot n \cdot E(X_0) = E(X_0) = 2, \\ Var(X^{(n)}) &= Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2} Var\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(Y_i) \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot Var(X_0) = \frac{1}{n} Var(X_0) = \frac{8,2}{n}. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$

b) Mit der Tschebyscheff-Ungleichung gilt für jedes $k \in \mathbb{R}$

$$P(|X^{(100)} - E(X^{(100)})| < k) \geq 1 - \frac{Var(X^{(100)})}{k^2} = 1 - \frac{8,2}{100 \cdot k^2}.$$

Da $1 - \frac{8,2}{100 \cdot k^2} \geq 0,95$ für $k \geq \sqrt{\frac{1}{0,05} \cdot \frac{8,2}{100}} \approx 1,28$ gilt, liegt $X^{(100)}$ mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 Prozent im Intervall

$$I := (E(X^{(100)}) - 1,28; E(X^{(100)}) + 1,28) = (2 - 1,28; 2 + 1,28) = (0,72; 3,28).$$

4

Aufgabe 7: Im Elfmeterschießen zwischen den Mannschaften A und B schießt in jeder Runde zunächst ein Spieler der Mannschaft A und dann ein Spieler der Mannschaft B einen Elfmeter. Nach fünf Runden steht es 4 : 4. Das Spiel wird solange fortgeführt, bis es nach einer Runde nicht mehr Unentschieden steht. Dabei schießen die Spieler der Mannschaft A jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 Prozent einen Elfmeter ins Tor und die Spieler der Mannschaft B mit einer Wahrscheinlichkeit von 70 Prozent.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Runde des Elfmeterschießens Unentschieden endet.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Elfmeterschießen, ausgehend vom Zwischenstand von 4 : 4 nach fünf Runden, nach genau fünf weiteren Runden beendet ist?

c) Berechnen Sie die erwartete Anzahl der weiteren Runden, die ausgehend vom Zwischenstand von 4 : 4 nach fünf Runden noch benötigt werden, bis das Elfmeterschießen beendet ist.

Lösung:

a) Eine Runde des Elfmeterschießens endet Unentschieden, wenn entweder beide Spieler den Elfmeter nicht ins Tor schießen oder beide Spieler den Elfmeter ins Tor schießen. Die zugehörige Wahrscheinlichkeit q_0 ergibt sich also durch

$$q_0 = 0,2 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,7 = 0,06 + 0,56 = 0,62.$$

3

b) Wir gehen vom Zwischenstand von 4 : 4 nach fünf Runden aus. Damit das Spiel nun nach genau fünf weiteren Runden endet, müssen also zunächst 4 Runden Unentschieden enden und dann darf die nächste Runde nicht Unentschieden enden. Somit ergibt sich für die zugehörige Wahrscheinlichkeit

$$p(5) = q_0^4 \cdot (1 - q_0) = 0,62^4 \cdot 0,38 = 0,05615 \cdots \approx 0,0562.$$

3

c) Es sei X die Zufallsgröße, die die Anzahl der weiteren Runden angibt, die ausgehend vom Zwischenstand von 4 : 4 nach fünf Runden noch benötigt werden, bis das Elfmeterschießen beendet ist. Dann gilt analog zu Teil b) $P(X = k) = q_0^{k-1} \cdot (1 - q_0)$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Also ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung P^X der Zufallsgröße X die negative Binomialverteilung mit Parameter $p := 1 - q_0 = 0,38$. Nach 4.13 gilt somit $E(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,38} \approx 2,63$. Also werden noch 2,63 weitere Runden erwartet.

4

Aufgabe 8: Es sei $\Omega := [0;2]$ sowie $f_a(x) := a \cdot x^2 + \frac{2}{3}$ für $x \in \Omega$ und $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das $a_0 \in \mathbb{R}$, für das (Ω, ρ) für $\rho := f_{a_0}$ ein stetiges Zufallsexperiment ist.

b) Es sei P die Wahrscheinlichkeitsverteilung des stetigen Zufallsexperimentes (Ω, ρ) aus Teil a). Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F von P und die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ für $A := (1;2)$.

Lösung:

a) Damit (Ω, ρ) ein stetiges Zufallsexperiment ist, muss ρ nichtnegativ sein und $\int_\Omega \rho(x)\mathrm{d}x = 1$ gelten. Für $a \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int\limits_\Omega f_a(x)\mathrm{d}x \quad = \quad \int\limits_0^2 \left(a \cdot x^2 + \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{2}{3}x\right]\Big|_{x=0}^{x=2} = \frac{8}{3}a + \frac{4}{3}.$$

Daher gilt $\int\limits_\Omega f_a(x)\mathrm{d}x = 1$ nur für $a = -\frac{1}{8}$. Definiert man $a_0 := -\frac{1}{8}$, so ist (Ω, ρ) ein stetiges Zufallsexperiment, da $\int_\Omega \rho(x)\mathrm{d}x = 1$ gilt und ρ nichtnegativ ist wegen

$$f_{a_0}(x) \geq -\frac{1}{8} \cdot 2^2 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6} > 0 \quad \text{für alle } x \in [0;2].$$

$\boxed{4}$

b) Für die Verteilungsfunktion F gilt nach Definition 5 aus Kapitel IV

$$F(x) = \int\limits_0^x \rho(y)\mathrm{d}y = \int\limits_0^x \left(-\frac{1}{8} \cdot y^2 + \frac{2}{3}\right)\mathrm{d}y = \left[-\frac{1}{24}y^3 + \frac{2}{3}y\right]\Big|_{y=0}^{y=x} = -\frac{1}{24}x^3 + \frac{2}{3}x, \quad x \in \Omega.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} P(A) &= P((1;2)) = \int\limits_1^2 \rho(y)\mathrm{d}y = F(2) - F(1) = \left(-\frac{8}{24} + \frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{1}{24} + \frac{2}{3}\right) \\ &= 1 - \frac{15}{24} = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8} = 0{,}375. \end{aligned}$$

$\boxed{6}$

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

Wenn nichts anderes angegeben ist, sei stets (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^*, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen P^X bzw. P^Y, $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ Zufallsgrößen sowie $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

		wahr	falsch
1.	Sind X und Y stochastisch unabhängig, so gilt $P(X = 1 \wedge Y = 5) = P(X = 1) \cdot P(Y = 5)$.	X	
2.	Gilt $P(B) > 0$ und $P(A\|B) = 0$, so sind A und B stochastisch unabhängig.		X
3.	Gilt $P^X = P^Y$, so folgt $X = Y$.		X
4.	Sind A, B, C paarweise stochastisch unabhängig und sind $A \cap B$ und C stochastisch unabhängig, so sind A, B, C stochastisch unabhängig.	X	
5.	Der Quartilsabstand einer Menge von Messwerten ist stets kleiner als die Standardabweichung.		X
6.	Es gilt $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.	X	
7.	Existiert $E(X^4)$, so existiert auch $Var(X)$.	X	
8.	Ω^* ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.	X	
9.	Eine Eisdiele habe 15 Sorten Eis. Dann hat ein Kunde, der nur die Anzahl der Kugeln der einzelnen Sorten betrachtet, 680 Möglichkeiten, ein Eis mit drei Kugeln auszuwählen.	X	
10.	Ist die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $\omega \in \Omega^*$ konvergent, so gibt es eine eindeutig bestimmte Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$, so das $X_n \to X$ für $n \to \infty$ im Sinne der stochastischen Konvergenz gilt.		X

Erläuterungen:

1. Dies folgt unmittelbar aus der Definition der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsgrößen.

2. Gegenbeispiel: $\Omega := \{1, \ldots, 6\}$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, $A := \{1, 2, 3\}$, $B := \{4, 5\}$. Dann gilt $P(B) > 0$, $P(A|B) = 0$ sowie $P(A \cap B) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$.

3. Gegenbeispiel: $\Omega := \{0, 1\}$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, sowie $X(0) := -1$, $X(1) := 1$, $Y(0) := 1$, $Y(1) := -1$ (siehe Bemerkung 4.7).

4. Beweis: Da A und B stochastisch unabhängig sind sowie $A \cap B$ und C stochastisch unabhängig sind, folgt

$$P(A \cap B \cap C) = P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Da außerdem A, B, C paarweise stochastisch unabhängig sind, sind A, B, C stochastisch unabhängig.

5. Gegenbeispiel: Haben alle n Messwerte den gleichen Wert $x \in \mathbb{R}$, so sind sowohl der Quartilsabstand als auch die Standardabweichung gleich Null.

6. Beweis: Da $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ gilt und dies eine Vereinigung disjunkter Mengen ist, folgt
$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B).$$

7. Beweis: Wenn $E(X^4)$ existiert, so existiert nach Lemma 4.21 auch $E(X^2)$, da $|X^2(\omega)| \leq 1 + |X^4(\omega)|$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Nach Bemerkung 4.24 existiert somit $Var(X)$.

8. Dies folgt unmittelbar aus der Definition eines diskreten Zufallsexperimentes.

9. Gesucht ist die Anzahl der ungeordneten Proben mit Wiederholung vom Umfang $k = 3$, die man einer Menge mit $n = 15$ Elementen entnehmen kann. Diese beträgt
$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{17}{3} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 17 \cdot 8 \cdot 5 = 680.$$

10. Gegenbeispiel: Sei $\Omega := \mathbb{R}$, $p(0) := 1$ und $p(x) := 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Weiter sei $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $Z(\omega) := \omega$ für alle $\omega \in \Omega$ sowie $X_n := Z$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\Omega^* = \{0\}$ und $X_n(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist also $(X_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $\omega \in \Omega^*$ eine konvergente Folge. X_n konvergiert aber im Sinne der stochastischen Konvergenz gegen jede Zufallsgröße $X : \Omega \to \mathbb{R}$, die $X(0) = 0$ erfüllt. Also ist X nicht eindeutig.