Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. M. Winkler
C. Stinner

Essen, den 12.02.2010

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie für Lehramtsstudierende

Lösung

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50 von insgesamt 100 möglichen Punkten erreicht werden.
Runden Sie die Ergebnisse auf die dritte signifikante Dezimalstelle.

Aufgabe 1: Eine Schulklasse besteht aus 25 Schülern. Die Klassenlehrerin lost 20 Wochen lang in jeder Woche einen Schüler aus, der den Tafeldienst erledigen muss.

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Stellen Sie das Ereignis A : „mindestens einer der Schüler muss innerhalb der ersten 8 Wochen mehr als einmal den Tafeldienst erledigen" in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Mächtigkeit $|A|$ und die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Lösung:

a) Wir nummerieren die 25 Schüler der Klasse mit den Nummern 1 bis 25. Es sei $\Omega := \{1, 2, \ldots, 25\}^{20}$, wobei $(\omega_1, \ldots, \omega_{20}) \in \Omega$ bedeute, dass die Lehrerin in der i-ten Woche den Schüler mit der Nummer ω_i auslost ($i \in \{1, \ldots, 20\}$). Außerdem sei $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{25^{20}}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist (Ω, p) ein für die Situation geeignetes Laplace-Experiment. $\boxed{2}$

b) Als Teilmenge von Ω lässt sich das Ereignis A folgendermaßen darstellen:

$$A = \Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_{20}) \in \Omega \mid \text{es gibt } i, j \in \{1, \ldots, 8\} \text{ mit } i \neq j \text{ und } \omega_i = \omega_j\Big\}.$$

$\boxed{3}$

c) Ist $\bar{A}$ das Gegenereignis zu A, so gilt

$$\bar{A} = \Big\{(\omega_1, \ldots, \omega_{20}) \in \Omega \mid \omega_i \neq \omega_j \ \forall\, i, j \in \{1, \ldots, 8\} \text{ mit } i \neq j\Big\}.$$

Es folgt $|\bar{A}| = (25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 18) \cdot 25^{12}$, da man $25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot (25-8+1)$ Möglichkeiten hat, 8 verschiedene Schüler in den ersten 8 Wochen auszuwählen, und dann 25^{12} Möglichkeiten hat, die Schüler für die Wochen 9 bis 20 auszuwählen. Somit gilt

$$|A| = |\Omega| - |\bar{A}| = 25^{20} - (25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 18) \cdot 25^{12} \approx 6,50 \cdot 10^{27}.$$

Da (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, folgt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 18) \cdot 25^{12}}{25^{20}} \approx 1 - 0,286 = 0,714.$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 2: An einer Universität studieren durchschnittlich 20 Prozent der Studenten ein geisteswissenschaftliches, 35 Prozent ein naturwissenschaftliches und 45 Prozent ein ingenieurwissenschaftliches Fach. Von den Studenten der Geisteswissenschaften schaffen durchschnittlich 61 Prozent den Abschluss, von den Studenten der Naturwissenschaften 48 Prozent und von den Studenten der Ingenieurwissenschaften 35 Prozent.

a) Wieviel Prozent aller Studenten der Universität schaffen den Abschluss?

b) Eine Student schafft den Abschluss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit studiert er ein geisteswissenschaftliches Fach?

Lösung:

a) Es seien die Ereignisse A_1: „ein Student studiert ein geisteswissenschaftliches Fach”, A_2: „ein Student studiert ein naturwissenschaftliches Fach”, A_3: „ein Student studiert ein ingenieurwissenschaftliches Fach” und B: „ein Student schafft den Abschluss” definiert.
Gesucht ist also $P(B)$. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten sind bekannt:
$P(A_1) = 0,2$, $P(A_2) = 0,35$, $P(A_3) = 0,45$, $P(B|A_1) = 0,61$, $P(B|A_2) = 0,48$ und $P(B|A_3) = 0,35$.
Da $A_1, \ldots, A_3$ paarweise disjunkt sind, $P(A_i) > 0$ für $i \in \{1, \ldots, 3\}$ und $\sum_{i=1}^{3} P(A_i) = 1$ gilt, folgt aus dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= \sum_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i) = 0,61 \cdot 0,2 + 0,48 \cdot 0,35 + 0,35 \cdot 0,45 \\ &= 0,4475 \approx 0,448. \end{aligned}$$

Also schaffen 44,8 Prozent aller Studenten der Universität den Abschluss. $\boxed{5}$

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(A_1|B)$. Nach dem Satz von Bayes und dem Ergebnis aus Teil a) gilt

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B|A_i) \cdot P(A_i)} = \frac{0,61 \cdot 0,2}{0,4475} = 0,2726\ldots \approx 0,273.$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 3: Bei einem Glücksspiel wird zunächst dreimal hintereinander eine ideale Münze und anschließend zweimal hintereinander ein idealer Würfel geworfen. Bei jedem Münzwurf erhält man einen Punkt, wenn die Münze „Zahl" zeigt, und zwei Punkte, wenn die Münze „Kopf" zeigt. Addiert man zu dieser Punktzahl die Augensumme der beiden Würfelwürfe, so erhält man die Gesamtpunktzahl. Weiter sei A das Ereignis „die erzielte Gesamtpunktzahl ist ungerade", B das Ereignis „die Augensumme der beiden Würfelwürfe ist durch 5 teilbar" und C das Ereignis „die in den drei Münzwürfen erzielte Punktzahl ist mindestens 5". Untersuchen Sie, ob A, B, C paarweise stochastisch unabhängig sind. Untersuchen Sie außerdem, ob A, B, C stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

Es sei $\Omega := \{1,2\}^3 \times \{1,\ldots,6\}^2$ und $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^3 \cdot 6^2} = \frac{1}{288}$ für alle $\omega \in \Omega$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist. Dabei gibt für $(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega$ für $i \in \{1,2,3\}$ ω_i die im i-ten Münzwurf erzielte Punktzahl sowie ω_4 die Augenzahl des ersten Würfelwurfes und ω_5 die Augenzahl des zweiten Würfelwurfes an. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{5} \omega_i = 2n-1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\Big\} \\ B &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \omega_4 + \omega_5 \in \{5,10\}\Big\}, \\ C &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i \in \{5,6\}\Big\}. \end{aligned}$$

Damit die Gesamtpunktzahl ungerade ist, kann man $\omega_1,\ldots,\omega_4$ beliebig wählen und hat dann 3 Möglichkeiten für ω_5. Außerdem gibt es 4 Möglichkeiten, in den Würfelwürfen die Augensumme 5 zu erreichen, 3 Möglichkeiten, in den Würfelwürfen die Augensumme 10 zu erreichen, 3 Möglichkeiten, in den Münzwürfen die Punktzahl 5 und 1 Möglichkeit, in den Münzwürfen die Punktzahl 6 zu erreichen. Somit folgt

$$P(A) = \frac{2^3 \cdot 6 \cdot 3}{288} = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{2^3 \cdot (4+3)}{288} = \frac{7}{36},\ P(C) = \frac{(3+1) \cdot 6^2}{288} = \frac{1}{2}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i \in \{4,6\} \text{ und } \omega_4 + \omega_5 = 5\Big\} \\ &\quad \cup \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i \in \{3,5\} \text{ und } \omega_4 + \omega_5 = 10\Big\}, \\ A \cap C &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i = 5 \text{ und } \omega_4 + \omega_5 \text{ ist gerade}\Big\} \\ &\quad \cup \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i = 6 \text{ und } \omega_4 + \omega_5 \text{ ist ungerade}\Big\}, \\ B \cap C &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{3} \omega_i \in \{5,6\} \text{ und } \omega_4 + \omega_5 \in \{5,10\}\Big\}. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned}
P(A\cap B) &= \frac{4\cdot 4+4\cdot 3}{288}=\frac{7}{72}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{36}=P(A)\cdot P(B),\\
P(A\cap C) &= \frac{3\cdot 18+1\cdot 18}{288}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(C),\\
P(B\cap C) &= \frac{4\cdot 7}{288}=\frac{7}{72}=\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{2}=P(B)\cdot P(C).
\end{aligned}$$

Somit sind A, B, C paarweise stochastisch unabhängig.
Weiter gilt

$$\begin{aligned}
A\cap B\cap C &= \Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5)\in\Omega \mid \sum_{i=1}^{3}\omega_i = 6 \text{ und } \omega_4+\omega_5=5\Big\}\\
&\quad\cup\Big\{(\omega_1,\ldots,\omega_5)\in\Omega \mid \sum_{i=1}^{3}\omega_i = 5 \text{ und } \omega_4+\omega_5=10\Big\},
\end{aligned}$$

so dass folgt

$$P(A\cap B\cap C)=\frac{1\cdot 4+3\cdot 3}{288}=\frac{13}{288}\neq\frac{7}{144}=\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{36}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C).$$

Daher sind A, B, C nicht stochastisch unabhängig. $\boxed{10}$

Aufgabe 4: Das diskrete Zufallsexperiment (Ω, p) sei gegeben durch $\Omega := \mathbb{Z}$ sowie $p : \Omega \to [0,1]$, $p(\omega) := 2^{-\omega}$ für $\omega \in \mathbb{N}$ und $p(\omega) := 0$ für $\omega \in \Omega\setminus\mathbb{N}$. Weiter seien X_n, $n \in \mathbb{N}$, und X Zufallsgrößen auf Ω, definiert durch

$$X_n(\omega) := \begin{cases} e^{|\omega|}, & \text{falls } |\omega|\le n,\\ e^{2n}, & \text{falls } |\omega|>n,\end{cases}\ , n\in\mathbb{N}, \quad \text{sowie} \quad X(\omega) := e^{\omega} \text{ für } \omega\in\Omega.$$

Untersuchen Sie, ob $X_n \to X$ für $n \to \infty$ im Sinne der stochastischen Konvergenz gilt.

Lösung:
Es sei $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Wegen $X_n(\omega) = X(\omega)$ für $\omega \in \{1,\ldots,n\}$ gilt

$$\Big\{\omega\in\Omega\ :\ |X_n(\omega)-X(\omega)|\ge\varepsilon\Big\}\subset\big(\Omega\setminus\{1,\ldots,n\}\big).$$

Da $\mathbb{N}$ der Träger des diskreten Zufallsexperimentes (Ω, p) ist, folgt

$$\begin{aligned}
0\le P(\{|X_n-X|\ge\varepsilon\}) &\le P(\Omega\setminus\{0,1,\ldots,n\})=\sum_{x\in(\Omega\setminus\{0,\ldots,n\})\cap\mathbb{N}} p(x)\\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} p(k)=\sum_{k=n+1}^{\infty}2^{-k}=2^{-(n+1)}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k}\\
&= 2^{-(n+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2^{-n}.
\end{aligned}$$

Also folgt $P(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}) \to 0$ für $n \to \infty$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt somit $X_n \to X$ für $n \to \infty$ im Sinne der stochastischen Konvergenz. $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Eine Firma behauptet, dass mindestens 60 Prozent der Bevölkerung ihre Schokolade kaufen. In einer Umfrage unter 1500 Personen geben 884 an, dass sie die Schokolade der Firma kaufen.

a) Es sei angenommen, dass 60 Prozent der Bevölkerung die Schokolade der Firma kaufen. Bestimmen Sie ein möglichst großes $k \in \mathbb{N}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass von 1500 Personen höchstens k diese Schokolade kaufen, maximal 5 Prozent beträgt.

b) Wie ist die Behauptung der Firma, dass mindestens 60 Prozent der Bevölkerung ihre Schokolade kaufen, mit Hilfe des Ergebnisses aus Teil a) zu bewerten?

<u>Lösung:</u>

a) Es sei angenommen, dass 60 Prozent der Bevölkerung die Schokolade der Firma kaufen. Weiter sei X die Zufallsgröße, die angibt, wie viele Personen bei einer Umfrage unter 1500 Personen diese Schokolade kaufen. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n := 1500$ und $p := 0,6$, also $P^X = B_{n,p}$. Somit gilt nach der Näherungsformel von De Moivre - Laplace für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X \leq k) &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \leq \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \leq \frac{k - 900}{\sqrt{360}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{i\infty}^{\frac{k-900}{\sqrt{360}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\ &= \Phi\left(\frac{k-900}{\sqrt{360}}\right). \end{aligned}$$

Damit $P(X \leq k) \leq 0,05$ ist, muss also $\Phi\left(\frac{k-900}{\sqrt{360}}\right) \leq 0,05$ gelten. Wegen $\Phi(t) \leq 0,05$ für $t \leq -1,66$ muss also $\frac{k-900}{\sqrt{360}} \leq -1,66$ gelten. Dies ist für $k \leq 900 - 1,66 \cdot \sqrt{360} \approx 868,50$ erfüllt. Somit ist $k = 868$ das mit der verwendeten Näherung maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass $P(X \leq k) \leq 0,05$ gilt. $\boxed{7}$

b) Da in der Umfrage 884 Personen die Schokolade kaufen und mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 Prozent mindestens 868 von 1500 Personen die Schokolade kaufen würden, wenn die Behauptung der Firma stimmen würde, ist es wahrscheinlicher, dass die Behauptung stimmt. Man kann aber nicht definitiv sagen, ob die Behauptung der Firma stimmt oder nicht. $\boxed{3}$

Aufgabe 6: Es sei (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment und $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen, für die $E(X^2)$ und $E(Y^2)$ existieren sowie $Var(X) > 0$ und $Var(Y) > 0$ gilt.

Weiter gelte $Y \geq 0$, $E(X) = E(-X)$ sowie $Y(\omega) = 0$ für alle $\omega \in X^{-1}((-\infty, 0))$. Beweisen Sie, dass X und Y nicht negativ korreliert sind.

Lösung:
Es ist zu zeigen, dass

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} \geq 0$$

gilt. Wegen $Var(X) > 0$ und $Var(Y) > 0$ ist dies äquivalent zu

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \geq 0.$$

Wegen $E(X) = E(-X)$ gilt

$$E(X) = E(-X) = -E(X),$$

also $E(X) = 0$. Weiter gilt nach Vorraussetzung $X(\omega) \cdot Y(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$, für die $X(\omega) < 0$ gilt, sowie $Y(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Daher folgt

$$\begin{aligned} E(X \cdot Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0} X(\omega) \cdot Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) < 0} X(\omega) \cdot Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega, X(\omega) \geq 0} X(\omega) \cdot Y(\omega) \cdot P(\{\omega\}) + 0 \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

da alle Summanden der letzten Summe größer oder gleich 0 sind. Somit folgt

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(X \cdot Y) - 0 \geq 0,$$

so dass X und Y nicht negativ korreliert sind. $\boxed{10}$

Aufgabe 7: In einem Glücksspiel wird ein idealer Würfel zweimal hintereinander geworfen. Zur Ermittlung der Punktzahl wird das Quadrat der im ersten Wurf erzielten Augenzahl mit der im zweiten Wurf erzielten Augenzahl multipliziert. Die Zufallsgröße X gebe die bei dem Spiel erreichte Punktzahl an.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

b) Jemand spielt das Glücksspiel nun 50 mal hintereinander. Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ein möglichst kleines Intervall I an, in dem seine in den 50 Spielen insgesamt erreichte Punktzahl mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 Prozent liegt.

Lösung:

a) Für $i \in \{1, 2\}$ sei X_i die Zufallsgröße, die die Augenzahl im i-ten Würfelwurf angibt. Dann sind X_1 und X_2 nach Vorlesung stochastisch unabhängig. Nach Aufgabe 2 von Übungsblatt 13 sind daher auch X_1^k und X_2^l für beliebige $k, l \in \mathbb{N}$ stochastisch unabhängig. Somit gilt

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1^2 \cdot X_2) = E(X_1^2) \cdot E(X_2) = \left(\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{91}{6} \cdot \frac{7}{2} = \frac{637}{12} \approx 53,1. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E(X_1^4 \cdot X_2^2) = E(X_1^4) \cdot E(X_2^2) = \left(\sum_{k=1}^{6} k^4 \cdot \frac{1}{6}\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{6} k^2 \cdot \frac{1}{6}\right) \\ &= \frac{2275}{6} \cdot \frac{91}{6} = \frac{207025}{36} \approx 5750,7. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{207025}{36} - \frac{405769}{144} = \frac{422331}{144} \approx 2932,9.$$

$\boxed{6}$

b) Die Zufallsgröße Y gebe die in 50 Spielen insgesamt erreichte Punktzahl an. Ist Y_i die im i-ten Spiel erreichte Punktzahl, so gilt $Y = Y_1 + \cdots + Y_{50}$. Da $Y_1, \ldots, Y_{50}$ nach Vorlesung stochastisch unabhängig sind, folgt

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{50} E(Y_i) = 50 \cdot E(X)$$

und

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{50} Var(Y_i) = 50 \cdot Var(X).$$

Somit folgt mit der Tschebyscheff-Ungleichung für jedes $k \in \mathbb{R}$

$$P(|Y - E(Y)| < k) \geq 1 - \frac{Var(Y)}{k^2} = 1 - \frac{50 \cdot Var(X)}{k^2}.$$

Da $1 - \frac{50 \cdot Var(X)}{k^2} \geq 0,8$ für $k \geq \sqrt{\frac{1}{0,2} \cdot 50 \cdot Var(X)} \approx 856,3$ gilt, liegt Y mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80 Prozent im Intervall

$$\begin{aligned} I &:= (E(Y) - 856,3; E(Y) + 856,3) = (2654,2 - 856,3; 2654,2 + 856,3) \\ &= (1797,9; 3510,5). \end{aligned}$$

$\boxed{4}$

Aufgabe 8: Ein Junge wirft jeden Tag um 16:00 Uhr einen mit Wasser gefüllten Luftballon aus dem Fenster. Im Durchschnitt trifft er bei jedem zwanzigsten Wurf einen vorbeigehenden Passanten.

a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Junge innerhalb eines Jahres mindestens 18 Mal einen Passanten trifft, exakt an.

b) Berechnen Sie einen Näherungswert für die in Teil a) angegebene Wahrscheinlichkeit.

Lösung:

a) Es sei A das Ereignis „der Junge trifft innerhalb eines Jahres mindestens 18 Mal einen Passanten" und X die Zufallsgröße, die die Anzahl der von dem Jungen innerhalb eines Jahres getroffenen Passanten angibt. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n := 365$ und $p := \frac{1}{20}$. Somit gilt

$$P(A) \quad = \quad P(X \geq 18) = \sum_{k=18}^{365} B_{n,p}(k) = \sum_{k=18}^{365} \binom{365}{k} \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^k \cdot \left(\frac{19}{20}\right)^{365-k}.$$

$\boxed{4}$

b) Mit der Näherungsformel von De Moivre - Laplace gilt

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X \geq 18) = P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \geq \frac{18 - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \geq \frac{18 - 18,25}{\sqrt{17,3375}}\right) \\ &\approx P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \geq -0,06\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-0,06}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\ &= 1 - \Phi(-0,06) = 1 - (1 - \Phi(0,06)) = \Phi(0,06) = 0,5239. \end{aligned}$$

$P(A)$ beträgt also ungefähr $52,4$ Prozent. $\boxed{6}$

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

Wenn nichts anderes angegeben ist, sei stets (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment, $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen sowie $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

		wahr	falsch
1.	Gilt $P(A \cap B) > 0$, so folgt $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B\|A) \cdot P(C\|A \cap B)$.	X	
2.	Sind A, B, C stochastisch unabhängig, so sind auch $A \cap B$ und C stochastisch unabhängig.	X	
3.	Es gilt $\lim_{n\to\infty}(n! \cdot e^n \cdot n^{-n}) = 1$.		X
4.	Sind X, Y, Z stochastisch unabhängig, so gilt $P(X = 2 \wedge Z = 8) = P(X = 2) \cdot P(Z = 8)$.	X	
5.	Existiert $Var(X)$, so existiert auch $E(X^3)$.		X
6.	Zieht man aus einer Urne, in der sich 5 gelbe, 8 grüne und 11 rote Kugeln befinden, mit einem Handgriff 5 Kugeln, so befinden sich unter den gezogenen Kugeln im Durchschnitt 2,4 rote.		X
7.	Hat ein Bäcker 8 Sorten Kuchen und betrachtet ein Kunde nur die Anzahl der Stücke der einzelnen Sorten, so hat der Kunde 330 Möglichkeiten, 4 Stücke Kuchen zusammenzustellen.	X	
8.	Gilt $P(X \geq 1) = 1$, so folgt $E(X^3) \geq E(X)$.	X	
9.	Es gibt eine Folge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ mit $\lim_{n\to\infty} p(\omega_n) = 0$.		X
10.	Zu jedem Testproblem gibt es eine Entscheidungsregel, deren Fehler 1. Art gleich 0 ist.	X	

<u>Erläuterungen:</u>

1. <u>Beweis:</u> Dies folgt aus dem Multiplikationssatz 6.10.

2. <u>Beweis:</u> Da A, B, C stochastisch unabhängig sind, folgt
$$P((A \cap B) \cap C) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = P(A \cap B) \cdot P(C).$$

3. Wegen der Stirling'schen Formel gilt $\lim_{n\to\infty}(n! \cdot e^n \cdot n^{-n} \cdot (\sqrt{2\pi n})^{-1}) = 1$, so dass $n! \cdot e^n \cdot n^{-n} \to \infty$ für $n \to \infty$ folgt.

4. <u>Beweis:</u> Dies folgt unmittelbar aus der Definition der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsgrößen.

5. <u>Gegenbeispiel:</u> Sei $\Omega := \mathbb{N}$, $p : \Omega \to [0, 1]$, $p(\omega) := 2^{-\omega}$ für $\omega \in \Omega$ sowie $X : \Omega \to \mathbb{R}$, $X(\omega) := 2^{\frac{\omega}{3}}$ für $\omega \in \Omega$. Dann gilt
$$\sum_{\omega\in\Omega} |X^2(\omega)| \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} 2^{-\frac{\omega}{3}} < \infty,$$

$$\sum_{\omega\in\Omega} |X^3(\omega)| \cdot P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\mathbb{N}} 1 = \infty,$$

so dass $E(X^2)$ und damit $Var(X)$ existiert, während $E(X^3)$ nicht existiert.

6. Die Zufallsgröße, die die Anzahl der roten Kugeln angibt, hat als Wahrscheinlichkeitsverteilung die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern $n := 5$ (Anzahl der gezogenen Kugeln), $N := 24$ (Anzahl der Kugeln in der Urne) und $K := 11$ (Anzahl der roten Kugeln in der Urne). Als Erwartungswert ergibt sich $n \cdot \frac{K}{N} = 5 \cdot \frac{11}{24} = \frac{55}{24} = 2,291\bar{6}$.

7. Die Anzahl der Möglichkeiten beträgt $\binom{8+4-1}{4} = \binom{11}{4} = 330$.

8. <u>Beweis:</u> Gilt $P(X \geq 1) = 1$, so folgt

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k\in\mathbb{R}} k \cdot P(X=k) = \sum_{k\in[1,\infty)} k \cdot P(X=k) \\ &\leq \sum_{k\in[1,\infty)} k^3 \cdot P(X=k) = \sum_{k\in\mathbb{R}} k^3 \cdot P(X=k) = E(X^3). \end{aligned}$$

9. <u>Gegenbeispiel:</u> Sei $\Omega := \{1,\ldots,6\}$, (Ω, p) ein Laplace-Experiment. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} p(\omega_n) = \frac{1}{6} \neq 0$ für jede Folge $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$.

10. Dies folgt aus Bemerkung 1.6 aus Kapitel II der Vorlesung.