Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. M. Winkler
C. Stinner

Essen, den 13.04.2010

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie für Lehramtsstudierende

Lösung

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50 von insgesamt 100 möglichen Punkten erreicht werden.
Runden Sie die Ergebnisse auf die dritte signifikante Dezimalstelle.

Aufgabe 1: Bei einem Preisausschreiben wurden 20 Personen ausgelost, die nun die Hauptgewinne gewinnen können. Unter diesen Personen sind Herr Meier und Herr Müller. Es stehen fünf Autos mit unterschiedlichen Farben bereit. Nun wird nacheinander jedem Auto durch Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne, in der sich 20 Zettel mit den Namen der ausgewählten Personen befinden, sein Gewinner zugelost.

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Stellen Sie das Ereignis A : „Herr Meier und Herr Müller gewinnen jeweils ein Auto" in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Mächtigkeit $|A|$ und die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

Lösung:

a) Wir nummerieren die 20 ausgewählten Personen mit den Nummern 1 bis 20, wobei Herr Meier die Nummer 1 und Herr Müller die Nummer 2 erhalte. Weiterhin seien die Autos mit den Nummern 1 bis 5 so nummeriert, dass zunächst der Gewinner von Auto 1, dann der Gewinner von Auto 2, usw. ausgelost wird. Es sei

$$\Omega := \Big\{(\omega_1, \dots, \omega_5) \in \{1, \dots, 20\}^5 \ : \ |\{\omega_1, \dots, \omega_5\}| = 5\Big\},$$

wobei $(\omega_1, \dots, \omega_5) \in \Omega$ bedeute, dass der Gewinner von Auto i die Person mit der Nummer ω_i ist ($i \in \{1, \dots, 5\}$). Außerdem sei $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist (Ω, p) ein für die Situation geeignetes Laplace-Experiment. $\boxed{3}$

b) Als Teilmenge von Ω lässt sich das Ereignis A folgendermaßen darstellen:

$$A = \Big\{(\omega_1, \dots, \omega_5) \in \Omega \mid \{1, 2\} \subset \{\omega_1, \dots, \omega_5\}\Big\}.$$

$\boxed{3}$

c) Man hat zunächst 5 Möglichkeiten, das Auto auszuwählen, das Herr Meier gewinnt, und dann 4 Möglichkeiten für das Auto, das Herr Müller gewinnt. Anschließend hat man noch $18 \cdot 17 \cdot 16$ Möglichkeiten für die Gewinner der drei übrigen Autos. Somit gilt

$$|A| = 5 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 = 97920.$$

Da (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist, folgt

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16} = \frac{1}{19} \approx 0,0526.$$

$\boxed{5}$

Aufgabe 2: An einer Krankheit sind 2 Prozent der Bevölkerung erkrankt. Es gebe zwei Tests A und B, mit denen Personen auf diese Krankheit hin untersucht werden. Es sei bekannt, dass Test A bei 95 Prozent der gesunden Personen negativ und bei 99,5 Prozent der erkrankten Personen positiv ausfällt. Außerdem sei bekannt, dass bei 99,7 Prozent der gesunden Personen mindestens einer der beiden Test negativ ausfällt und bei 99,3 Prozent der erkrankten Personen beide Tests positiv ausfallen.

a) Bei einer Person fällt Test A positiv aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie an der Krankheit erkrankt?

b) Bei einer Person fallen beide Tests positiv aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie an der Krankheit erkrankt?

Lösung:

a) Es seien die Ereignisse A_1, A_2 und B definiert durch A_1 : „die Person ist an der Krankheit erkrankt”, A_2 : „die Person ist gesund” und B : „Test A fällt positiv aus”.

Dann gilt $P(A_1) = 0,02$ und $P(A_2) = 0,98$, so dass A_1 und A_2 disjunkte Ereignisse mit positiven Wahrscheinlichkeiten sind, die $A_1 \cup A_2 = \Omega$ erfüllen (wobei Ω der Bevölkerung entspricht).

Weiter gilt: $A_1|B$ ist das Ereignis „eine mit Test A positiv getestete Person ist erkrankt”, $B|A_1$ entspricht dem Ereignis „eine erkrankte Person wird mit Test A positiv getestet” und $B|A_2$ entspricht „eine gesunde Person wird mit Test A positiv getestet”.

Aus der Aufgabenstellung folgt $P(B|A_1) = 0,995$ und $P(B|A_2) = 0,05$.

Somit folgt aus der Formel von Bayes:

$$\begin{aligned} P(A_1|B) &= \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2)} \\ &= \frac{0,995 \cdot 0,02}{0,995 \cdot 0,02 + 0,05 \cdot 0,98} = 0,2888\dots \approx 0,289. \end{aligned}$$

Eine mit Test A positiv getestete Person ist also mit einer Wahrscheinlichkeit von 28,9 Prozent tatsächlich an der Krankheit erkrankt. $\boxed{5}$

b) Es gelten den Bezeichnungen aus Teil a) und es sei C das Ereignis „beide Tests fallen positiv aus". Dann folgt aus der Aufgabenstellung $P(C|A_1) = 0,993$ und $P(C|A_2) = 0,003$, so dass mit der Formel von Bayes gilt:

$$\begin{aligned} P(A_1|C) &= \frac{P(C|A_1) \cdot P(A_1)}{P(C|A_1) \cdot P(A_1) + P(C|A_2) \cdot P(A_2)} \\ &= \frac{0,993 \cdot 0,02}{0,993 \cdot 0,02 + 0,003 \cdot 0,98} = 0,8710 \cdots \approx 0,871. \end{aligned}$$

Fallen bei einer Person beide Tests positiv aus, so ist sie also mit einer Wahrscheinlichkeit von 87,1 Prozent tatsächlich an der Krankheit erkrankt. $\boxed{5}$

Aufgabe 3:

a) In einem Glücksspiel werde ein idealer Würfel zweimal hintereinander geworfen und die Zufallsgröße X gebe die bei dem Spiel erzielte Punktzahl an. Dabei erhält man 0 Punkte, wenn beide erzielten Augenzahlen kleiner als 4 sind, und ansonsten erhält man das Maximum der erzielten Augenzahlen als Punktzahl. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Varianz $Var(X)$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ein möglichst kleines $n \in \mathbb{N}$, so dass der Durchschnitt der in n Würfen mit einem idealen Würfel erzielten Augenzahlen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 Prozent im Intervall $(3, 4)$ liegt.

Lösung:

a) Ist Y die Zufallsgröße, die das Maximum der beiden erzielten Augenzahlen angibt, so gilt $P(Y = k) = \frac{2k-1}{36}$ für $k \in \{1, \ldots, 6\}$, da für gegebenes k die Würfelergebnisse (i, k) und (k, i), $i \in \{1, \ldots, k\}$, die maximale Augenzahl k haben und das Ergebnis (k, k) nur einmal gezählt werden darf. Somit gilt $P(X = k) = \frac{2k-1}{36}$ für $k \in \{4, 5, 6\}$ und $P(X = x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{4, 5, 6\}$. Daher folgt

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X = x) = \sum_{k=4}^{6} k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{139}{36} \approx 3,86$$

und

$$E(X^2) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 \cdot P(X = x) = \sum_{k=4}^{6} k^2 \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{733}{36}.$$

Daher gilt

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{733}{36} - \left(\frac{139}{36}\right)^2 \approx 5,45.$$

$\boxed{6}$

b) Gibt X_i die im i-ten Wurf erzielte Augenzahl an und Y_n den Durchschnitt der in n Würfen erzielten Augenzahlen, so gilt $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Da $X_1, \dots, X_n$ nach Vorlesung identisch verteilt und stochastisch unabhängig sind, folgt

$$E(Y_n) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_1) = E(X_1) = 3,5$$

und

$$\begin{aligned} Var(Y_n) &= \frac{1}{n^2}Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_1) \\ &= \frac{Var(X_1)}{n} = \frac{35}{12n}. \end{aligned}$$

Daher gilt mit der Tschebyscheff'schen Ungleichung

$$P(3 < Y_n < 4) = P(|Y_n - E(Y_n)| < 0,5) \geq 1 - \frac{Var(Y_n)}{(0,5)^2} = 1 - \frac{35}{3n},$$

so dass $P(3 < Y_n < 4) \geq 0,75$ für $\frac{35}{3n} \leq 0,25$, also $n \geq \frac{140}{3} = 46,\bar{6}$ gilt. Somit ist $n = 47$ das gesuchte minimale n. $\boxed{7}$

Aufgabe 4: Berechnen Sie eine Näherung für die Anzahl der Dezimalstellen der Zahl $\binom{15000}{4000}$.

Lösung:

Mit der Stirling'schen Näherungsformel gilt

$$\begin{aligned} \binom{15000}{4000} &= \frac{15000!}{4000! \cdot 11000!} \\ &\approx \frac{15000^{15000} \cdot e^{-15000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 15000}}{4000^{4000} \cdot e^{-4000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 4000} \cdot 11000^{11000} \cdot e^{-11000} \cdot \sqrt{2\pi \cdot 11000}} \\ &= \frac{15000^{15000} \cdot e^{-15000} \cdot \sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{6} \cdot 50}{4000^{4000} \cdot 11000^{11000} \cdot e^{-15000} \cdot 2\pi\sqrt{11} \cdot 2000} \\ &= \frac{15^{15000} \cdot 10^{3 \cdot 15000} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3}}{4^{4000} \cdot 10^{3 \cdot 4000} \cdot 11^{11000} \cdot 10^{3 \cdot 11000} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{11\pi}} \\ &= \frac{10^{45001} \cdot 10^{15000 \cdot \log_{10}(15)} \cdot 10^{\log_{10}(5\sqrt{3})}}{10^{45003} \cdot 10^{4000 \cdot \log_{10}(4)} \cdot 10^{11000 \cdot \log_{10}(11)} \cdot 10^{\log_{10}(2 \cdot \sqrt{11\pi})}} \\ &\approx 10^{-2} \cdot 10^{15000 \cdot 1,176} \cdot 10^{0,938} \cdot 10^{-4000 \cdot 0,602} \cdot 10^{-11000 \cdot 1,041} \cdot 10^{-1,07} \\ &\approx 10^{-2+17641,37+0,94-2408,24-11455,32-1,07} \approx 10^{3776}. \end{aligned}$$

Also hat die Zahl $\binom{15000}{4000}$ ungefähr 3780 Dezimalstellen. $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Ein idealer Würfel werde dreimal hintereinander geworfen. Es sei A das Ereignis „das Produkt der Augenzahlen ist ungerade", B das Ereignis „die Summe der Augenzahlen der ersten beiden Würfe ist durch 3 teilbar" sowie C das Ereignis „das Produkt der Augenzahlen ist durch 5 teilbar". Außerdem sei X die Zufallsgröße, die das Maximum der Augenzahlen der ersten beiden Würfe angibt, und Y die Zufallsgröße, die das Produkt der Augenzahlen des zweiten und dritten Wurfes angibt.

a) Untersuchen Sie, ob A und B stochastisch unabhängig sind, ob A und C stochastisch unabhängig sind.

b) Untersuchen Sie, ob die Zufallsgrößen X und Y stochastisch unabhängig sind.

Lösung:

a) Es sei $\Omega := \{1,\dots,6\}^3$ und $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216}$ für alle $\omega \in \Omega$, so dass (Ω, p) ein Laplace-Experiment ist. Dabei gibt für $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ für $i \in \{1,2,3\}$ ω_i die im i-ten Würfelwurf erzielte Augenzahl an. Dann gilt

$$\begin{aligned} A &= \Big\{(i,j,k) \in \Omega \mid i \cdot j \cdot k = 2n-1 \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\Big\} = \{1,3,5\}^3 \\ B &= \Big\{(i,j,k) \in \Omega \mid i + j \in \{3,6,9,12\}\Big\}, \\ C &= \Big\{(i,j,k) \in \Omega \mid i \cdot j \cdot k = 5n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\Big\} = \Omega \setminus \{1,2,3,4,6\}^3. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$P(A) = \frac{3^3}{216} = \frac{1}{8},\ P(B) = \frac{(2+5+4+1)\cdot 6}{216} = \frac{1}{3},\ P(C) = \frac{216-5^3}{216} = \frac{91}{216}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{(1,5),(5,1),(3,3)\} \times \{1,3,5\}, \\ A \cap C &= A \setminus \{1,3\}^3. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{3 \cdot 3}{216} = \frac{1}{24} = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B), \\ P(A \cap C) &= \frac{27 - 2^3}{216} = \frac{19}{216} \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{91}{216} = P(A) \cdot P(C). \end{aligned}$$

Somit sind A und B stochastig unabhängig, während A und C nicht stochastisch unabhängig sind. $\boxed{6}$

b) X und Y sind genau dann stochastisch unabhängig, wenn gilt

$$P(X = x \wedge Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y) \qquad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}.$$

Für $x = 1$ und $y = 36$ gilt aber

$$\begin{aligned}
P(X=1) &= P\Big(\Big\{(1,1,k)\,|\,k \in \{1,\dots,6\}\Big\}\Big) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}, \\
P(Y=36) &= P\Big(\Big\{(i,6,6)\,|\,i \in \{1,\dots,6\}\Big\}\Big) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36}.
\end{aligned}$$

Wegen

$$P(X = 1 \wedge Y = 36) = P(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{36} \cdot \frac{1}{36} = P(X=1) \cdot P(Y=6)$$

sind daher X und Y nicht stochastisch unabhängig. $\boxed{4}$

Aufgabe 6: Ein Meinungsforschungsinstitut behauptet, dass eine Partei von höchstens 4,5 Prozent der Wahlberechtigten gewählt wird. Diese Behauptung sei die Nullhypothese H_0.

a) Formulieren Sie die Gegenhypothese H_1 bezüglich H_0 und bestimmen Sie für eine Umfrage unter 1000 Wahlberechtigten eine Entscheidungsregel δ, so dass H_0 auf Basis des Signifikanzniveaus 0,05 verworfen wird.

b) In einer Umfrage unter 1000 Wahlberechtigten geben 48 an, dass sie diese Partei wählen. Wie ist H_0 auf der Basis der Entscheidungsregel δ zu bewerten?

Lösung:

a) Die Gegenhypothese H_1 bezüglich H_0 lautet „mehr als 4,5 Prozent der Wahlberechtigten wählen diese Partei".
Die Zufallsgröße X gebe die Anzahl der Wahlberechtigten in einer Umfrage unter 1000 Personen an, die diese Partei wählen. Dabei wird angenommen, dass ein Wahlberechtigter mit der Wahrscheinlichkeit $p := 0,045$ diese Partei wählt. Da die Hypothese H_0 auf Basis des Signifikanzniveaus 0,05 verworfen werden soll, muss nun $k \in \mathbb{N}_0$ so bestimmt werden, dass $P_{0,045}(X \geq k) \approx 0,05$ gilt. Es gilt mit der Näherungsformel von De Moivre - Laplace für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
P_{0,045}(X \geq k) &= P_{0,045}\left(\frac{X - 1000 \cdot p}{\sqrt{1000 \cdot p \cdot (1-p)}} \geq \frac{k - 1000 \cdot p}{\sqrt{1000 \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\
&= P_{0,045}\left(\frac{X-45}{\sqrt{42,975}} \geq \frac{k-45}{\sqrt{42,975}}\right) \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{k-45}{\sqrt{42,975}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y = 1 - \Phi\left(\frac{k-45}{\sqrt{42,975}}\right).
\end{aligned}$$

Also muss $\Phi(\frac{k-45}{\sqrt{42,975}}) \approx 0,95$ gelten. Da $\Phi(t) \approx 0,95$ für $t = 1.64$ gilt, folgt $k \approx 45 + 1,64 \cdot \sqrt{42,975} \approx 55,75$. Somit kann man die Entscheidungsregel δ definieren durch

$$\delta(x) := \begin{cases} H_0, & \text{falls } x \leq 55, \\ H_1, & \text{falls } x \geq 56, \end{cases}$$

so dass die Hypothese H_0 durch δ auf Basis des Signifikanzniveaus 0,05 verworfen wird. $\boxed{7}$

b) Wegen $\delta(48) = H_0$ wird H_0 auf der Basis von δ angenommen. Somit ist es im Bezug auf die Stichprobe wahrscheinlicher, dass die Hypothese H_0 stimmt, aber man kann nicht definitv sagen, ob H_0 stimmt oder nicht. $\boxed{3}$

Aufgabe 7: Es seien (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P und $X, Y, Z : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen, für die $E(X^2)$, $E(Y^2)$ und $E(Z^2)$ existieren sowie $Var(X) > 0$, $Var(Y + Z) > 0$ und $Var(Z) = 0$ gilt. Weiter gelte $E((X - Y)^2) < E(X^2) + E(Y^2)$ und $P(Y = y) = P(-Y = y)$ für alle $y \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass X und $Y + Z$ positiv korreliert sind.

Lösung:
Es ist zu zeigen, dass

$$\rho(X, Y + Z) = \frac{Cov(X, Y + Z)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y + Z)}} > 0$$

gilt. Wegen $Var(X) > 0$ und $Var(Y + Z) > 0$ ist dies äquivalent zu

$$\begin{aligned} 0 < Cov(X, Y + Z) &= E(X \cdot (Y + Z)) - E(X) \cdot E(Y + Z) \\ &= E(X \cdot Y) + E(X \cdot Z) - E(X) \cdot E(Y) - E(X) \cdot E(Z). \quad (1) \end{aligned}$$

Wegen $Var(Z) = 0$ gibt es nach Lemma 4.31 der Vorlesung ein $c \in \mathbb{R}$ mit $P(Z = c) = 1$. Somit folgt $E(Z) = c$ und $Z(\omega) = c$ für alle $\omega \in \Omega^*$. Daher gilt

$$E(X \cdot Z) = \sum_{\omega \in \Omega^*} X(\omega) \cdot Z(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = c \cdot \sum_{\omega \in \Omega^*} X(\omega) \cdot P(\{\omega\}) = c \cdot E(X) = E(X) \cdot E(Z).$$

Wegen $E((X - Y)^2) < E(X^2) + E(Y^2)$ gilt weiterhin

$$E(X^2) - 2E(X \cdot Y) + E(Y^2) = E((X - Y)^2) < E(X^2) + E(Y^2),$$

also $E(X \cdot Y) > 0$. Außerdem gilt

$$E(Y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot P(Y = y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} y \cdot P(-Y = y) = E(-Y) = -E(Y),$$

also $E(Y) = 0$. Somit folgt aus (1)

$$Cov(X, Y + Z) = E(X \cdot Y) + E(X) \cdot E(Z) - E(X) \cdot E(Z) = E(X \cdot Y) > 0,$$

so dass X und $Y + Z$ positiv korreliert sind. $\boxed{10}$

Aufgabe 8: Die Bewohner einer Straße haben folgenden Durchschnittsverbräuche ihrer Autos in Litern pro 100 km gemessen:

$$5,2 \quad 6,7 \quad 8,9 \quad 3,5 \quad 4,2 \quad 9,6 \quad 7,4 \quad 6,3 \quad 7,9 \quad 16,4$$

Berechnen Sie zu diesen 10 Messwerten alle Größen, die für die Erstellung des Box-Plots benötigt werden, und zeichnen Sie den zu den Messwerten gehörenden Box-Plot.

Lösung:
Bezeichnen wir die Messwerte mit $x_1, \ldots, x_{10}$, so ergibt sich als aufsteigende Umordnung $x_{(1)}, \ldots, x_{(10)}$ der Messwerte:

$$3,5 \quad 4,2 \quad 5,2 \quad 6,3 \quad 6,7 \quad 7,4 \quad 7,9 \quad 8,9 \quad 9,6 \quad 16,4$$

Der Median ergibt sich bei 10 Messwerten als

$$x_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_{(5)} + x_{(6)}) = \frac{1}{2}(6,7 + 7,4) = 7,05.$$

Für das untere Quartil $x_{\frac{1}{4}}$ ergibt sich wegen $10 \cdot \frac{1}{4} = 2,5 \notin \mathbb{N}$:

$$x_{\frac{1}{4}} = x_{([10 \cdot \frac{1}{4} + 1])} = x_{([3,5])} = x_{(3)} = 5,2.$$

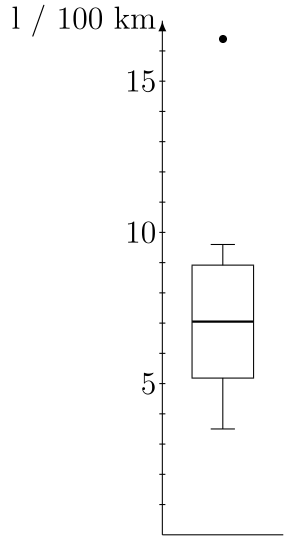
Für das obere Quartil $x_{\frac{3}{4}}$ ergibt sich wegen $10 \cdot \frac{3}{4} = 7,5 \notin \mathbb{N}$:

$$x_{\frac{3}{4}} = x_{([10 \cdot \frac{3}{4} + 1])} = x_{([8,5])} = x_{(8)} = 8,9.$$

Daher ergibt sich für die größte normale Beobachtung g und die kleinste normale Beobachtung k

$$\begin{aligned}
g &= \max\left\{x_i \mid i \in \{1, \ldots, 10\} \text{ und } x_i \leq x_{\frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \cdot (x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})\right\} \\
&= \max\left\{x_i \mid i \in \{1, \ldots, 10\} \text{ und } x_i \leq 14,45\right\} \\
&= 9,6, \\
k &= \min\left\{x_i \mid i \in \{1, \ldots, 10\} \text{ und } x_i \geq x_{\frac{1}{4}} - \frac{3}{2} \cdot (x_{\frac{3}{4}} - x_{\frac{1}{4}})\right\} \\
&= \min\left\{x_i \mid i \in \{1, \ldots, 10\} \text{ und } x_i \geq -0,35\right\} \\
&= 3,5.
\end{aligned}$$

Es gibt also den Ausreißer $16,4$ oberhalb von g und keinen Ausreißer unterhalb von k. Somit ergibt sich der folgende Box-Plot:



6

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

Wenn nichts anderes angegeben ist, seien stets (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^* und Wahrscheinlichkeitsverteilung P sowie $X_n, X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen $(n \in \mathbb{N})$ und $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

		wahr	falsch
1.	Ω^* ist abzählbar unendlich.		X
2.	Sind A, B, C paarweise stochastisch unabhängig und gilt $A \cap B \cap C = \emptyset$, so sind A, B, C stochastisch unabhängig.		X
3.	Gilt $P(C) > 0$ und $A \subset B \subset C$, so folgt $P(A\|C) \leq P(B\|C)$.	X	
4.	Zieht man aus einer Urne, in der sich 6 blaue, 4 gelbe und 5 weiße Kugeln befinden, nacheinander 8 Kugeln mit Zurücklegen, so zieht man dabei durchschnittlich 2,4 blaue Kugeln.		X
5.	Lost die Lehrerin in einer Klasse mit 25 Schülern, zu der Anja und Nick gehören, an jedem Schultag zwei Schüler für den Tafeldienst aus, so können Anja und Nick erwarten, dass sie am 300. Schultag zum ersten Mal gemeinsam Tafeldienst haben.	X	
6.	Gilt $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$, so sind X und Y stochastisch unabhängig.		X
7.	Existiert $E(X \cdot Y)$, so existieren auch $E(X)$ und $E(Y)$.		X
8.	Konvergiert $X_n \to X$ für $n \to \infty$ im Sinne der stochastischen Konvergenz, so gilt $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega^*$.	X	
9.	Ist $\rho : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\rho(x) := 2x$, $x \in [0,1]$, so ist $([0,1], \rho)$ ein stetiges Zufallsexperiment.	X	
10.	Ist δ eine Entscheidungsregel zu dem Testproblem $((P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta}, H_0)$, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese H_0 mittels δ fälschlicherweise angenommen wird, höchstens so groß wie der Fehler 2. Art von δ.	X	

Erläuterungen:

1. Ω^* ist abzählbar, kann aber durchaus endlich sein.

2. Gegenbeispiel: Es sei $\Omega := \{1, \ldots, 6\}^2$, (Ω, p) ein Laplace-Experiment, so dass für $(i, j) \in \Omega$ i die Augenzahl des ersten und j die Augenzahl des zweiten Wurfes mit einem idealen Würfel angebe. Weiter sei A: „im ersten Wurf wird eine 6 geworfen", B: „im zweiten Wurf wird eine 4 geworfen" und C: „die Augensumme ist ungerade".

Dann gilt $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$, $P(C) = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{1}{36} = P(A) \cdot P(B), \qquad P(A \cap C) = \frac{3}{36} = P(A) \cap P(C), \\ P(B \cap C) &= \frac{3}{36} = P(B) \cap P(C), \end{aligned}$$

sowie $A \cap B \cap C = \emptyset$, so dass die Voraussetzungen erfüllt sind. Aber es gilt

$$P(A \cap B \cap C) = 0 \neq \frac{1}{72} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

so dass A, B, C nicht stochastisch unabhängig sind.

3. Beweis: Es gilt

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} \leq \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(B|C).$$

4. Die Anzahl der gezogenen blauen Kugeln ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 8$ und $p = \frac{6}{15}$. Somit zieht man durchschnittlich $n \cdot p = 3,2$ Mal eine blaue Kugel.

5. Gibt die Zufallsgröße X die Nummer des Schultages an, an dem Anja und Nick zum ersten Mal gemeinsam Tafeldienst haben, so ist X negativ-binomialverteilt mit Parameter $p = \frac{1}{\binom{25}{2}} = \frac{1}{300}$.

6. Da $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ genau dann gilt, wenn $Cov(X, Y) = 0$ gilt (siehe Satz 4.33), liefert Bemerkung 6.21 ein Gegenbeispiel.

7. Gegenbeispiel: Es sei $\Omega := \mathbb{N}$, $p : \Omega \to [0, 1]$, $p(n) := 2^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$ sowie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ definiert durch $X \equiv 0$ und $Y(n) := 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $X \cdot Y \equiv 0$, so dass $E(X \cdot Y)$ existiert. Aber $E(Y)$ existiert nicht wegen

$$\sum_{n \in \Omega} |Y(n)| \cdot P(\{n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

8. Dies folgt aus Lemma 5.8 der Vorlesung.

9. Da $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenenes Intervall ist und ρ nichtnegativ auf $[0, 1]$ ist mit $\int_0^1 \rho(x)dx = 1$, folgt die Aussage aus Definition 1 aus Kapitel IV der Vorlesung.

10. Dies folgt aus Definition 1.5 aus Kapitel II der Vorlesung.