Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
M. Winkler

Essen, 31.01.2011

Klausur zur Wahrscheinlichkeitstheorie für Lehramtsstudierende

Bearbeitungszeit 90 min.

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 40 von insgesamt 100 möglichen Punkten erreicht werden.
Runden Sie die Ergebnisse auf die dritte signifikante Dezimalstelle.

Aufgabe 1. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Ein idealer Würfel werde $6n$-mal geworfen, und A bezeichne das Ereignis „Es erscheint n-mal eine Sechs“.

a) Modellieren Sie den Vorgang durch

i) ein Laplace-Experiment (Ω_L, p_L) sowie

ii) ein davon verschiedenes endliches Zufallsexperiment (Ω, p) mit $|\Omega| < |\Omega_L|$.

Stellen Sie in dem jeweiligen Modell A als Menge dar. $\boxed{8}$

Lösung: i) Wähle z.B.

$$\Omega_L := \{1, ..., 6\}^{6n}.$$

Dann ist

$$A = \Big\{ (\omega_1, ..., \omega_{6n}) \in \Omega_L \ \Big| \ \big| \{ i \in \{1, ..., 6n\} \mid \omega_i = 6 \} \big| \Big\}.$$

ii) Mit Interpretation als Bernoulli-Kette ($6n$-fache unabhängige Durchführung von (Ω_0, p_0) mit $\Omega_0 := \{0, 1\}$ und $p_0(0) = \frac{5}{6}$, $p_0(1) := \frac{1}{6}$) ist z.B.

$$\Omega := \{0, 1\}^{6n}$$

sinnvoll mit

$$p((\omega_1, ..., \omega_{6n})) := p_0(\omega_1) \cdot ... \cdot p_0(\omega_n),$$

und dann ergibt sich entsprechend

$$A = \Big\{ (\omega_1, ..., \omega_{6n}) \in \Omega \ \Big| \ \Big| \{ i \in \{1, ..., 6n\} \mid \omega_i = 1 \} \Big| \Big\}.$$

<u>Alternative</u> mit Einbringen von Vorwissen zur BV:

$$\Omega := \{0, ..., 6n\}, \qquad p(k) := \binom{6n}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}.$$

Dann ist

$$A = \{n\}.$$

b) Entwickeln Sie für beide Modellansätze aus a) je eine Formel zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit A. $\boxed{6}$

Lösung: i) Auszählen ergibt

$$|\Omega| = 6^{6n} \qquad \text{und} \qquad |A| = \binom{6n}{n} \cdot 5^{5n}$$

und damit

$$P(A) = \frac{\binom{6n}{n} \cdot 5^{5n}}{6^{6n}}.$$

ii) Mit Formel aus dem Umfeld mehrfacher unabhängiger Durchführungen folgt direkt

$$P(A) = \binom{6n}{n} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^n \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{5n}.$$

Die Alternative mit $\Omega = \{0, ..., 6n\}$ führt unmittelbar auf dasselbe Ergebnis.

Aufgabe 2. Bei einer Wahl geben je 35% aller Wähler ihre Stimme einer der Parteien A und B, auf die Parteien C und D entfallen 20% bzw. 10% aller Stimmen. Unter den 6% der *Erstwähler*, derjenigen Wähler also, die zum ersten Mal in ihrem Leben an einer Wahl teilgenommen haben, betragen die Stimmenanteile von A, B, C bzw. D hingegen 30%, 30%, 25% bzw. 15%. Nach der Wahl wird eine Regierungskoalition aus A und C gebildet, die übrigen Parteien stellen die Opposition.

a) Eine zufällig ausgewählte Person gibt an, sich bei der Wahl für Partei A entschieden zu haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist A Erstwähler? $\boxed{6}$

Lösung: Bezeichnet $P(A)$ die Wk. dafür, dass eine (zufällig ausgewählte) Person A-Wähler ist etc. und gibt $P(E)$ die entsprechende Wk. für Erstwählerschaft an, so sind offenbar $P(A) = 0,35$, $P(E) = 0,06$ sowie $P(A|E) = 0,30$ gegeben. Mit dem Satz von Bayes folgt

$$P(E|A) = \frac{P(A|E) \cdot P(E)}{P(A)} = \frac{0,30 \cdot 0,06}{0,35} \approx 0,0514.$$

b) Bestimmen Sie den Anteil der A-Wähler unter denjenigen Wählern, die bereits mindestens zum zweiten Mal an einer Wahl teilgenommen haben. $\boxed{6}$

Lösung: Der Satz von der totalen Wk. besagt, dass

$$P(A) = P(A|E) \cdot P(E) + P(A|\bar{E}) \cdot P(\bar{E})$$

gilt. Auflösen ergibt

$$P(A|\bar{E}) = \frac{P(A) - P(A|E) \cdot P(E)}{P(\bar{E})} = \frac{0,35 - 0,30 \cdot 0,06}{0,94} \approx 0,353,$$

denn $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 0,94$.

c) Eine Meinungsforschungsagentur möchte eine Umfrage unter allen Personen durchführen, die entweder Erstwähler oder Anhänger einer der Oppositionsparteien sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gehört ein zufällig ausgesuchter Wähler diesem Personenkreis an? $\boxed{6}$

Lösung: Mit der Siebformel ergibt sich für die gesuchte Wk.

$P(B \cup D \cup E) = P(B) + P(D) + P(E) - P(B \cap D) - P(B \cap E) - P(D \cap E) + P(B \cap D \cap E).$

Offenbar sind $P(B \cap D) = 0$ und $P(B \cap D \cap E) = 0$, und mit der Definition der bedingten Wk. folgen

$$P(B \cap E) = P(B|E) \cdot P(E) = 0,30 \cdot 0,06 = 0,018$$

sowie analog

$$P(D \cap E) = 0,15 \cdot 0,06 = 0,009.$$

Damit erhält man

$$P(B \cup D \cup E) = 0,35 + 0,10 + 0,06 - 0 - 0,018 - 0,009 + 0 = 0,483.$$

Aufgabe 3. Am Silvestertag 2010 beschloss Herr A, vom 31.01.2011 an täglich einmal ein Paar idealer Würfel zu werfen und anschließend eine gute Tat zu vollbringen, und zwar genau bis zu dem Tag, an dem beide Würfel eine Eins zeigen.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Herr A noch am 31. Januar 2012 seine Würfel wirft? $\boxed{4}$

Lösung: Herr A wirft nur dann noch am 31.01.2012 seine Würfel, wenn er vorher 365-mal keine Doppel-Eins gewürfelt hat. Da alle Würfe unabhängig voneinander geschehen, ist die Wk. hierfür

$$\left(\frac{35}{36}\right)^{365} \approx 0,0000342.$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt der letzte Spieltag auf einen Mittwoch? $\boxed{8}$

Lösung: Bezeichnet die ZG X die Anzahl der Würfe bis zum Abbruch und setzen wir $p := \frac{1}{36}$, so beträgt die gesuchte Wk.

$$\begin{aligned} P(X=3) + P(X=10) + P(X=17) + \ldots &= p + (1-p)^9 \cdot p + (1-p)^{16} \cdot p + \ldots \\ &= p \cdot \sum_{j=0}^{\infty} (1-p)^{7j+2} \\ &= p \cdot \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^7} \\ &= \frac{35^2}{36^3} \cdot \frac{1}{1-(\frac{35}{36})^7} \\ &\approx 0,147. \end{aligned}$$

Aufgabe 4. Ein idealer Würfel werde zweimal hintereinander geworfen. Dabei seien die Ereignisse A: „Die Augenzahl im ersten Wurf ist gerade", B: „Die Augenzahl im zweiten Wurf ist mindestens 5" und C: „Die Augensumme ist ungerade" definiert.

a) Untersuchen Sie, ob A und B, ob A und C und ob B und C stochastisch unabhängig sind. $\boxed{9}$

Lösung: Es ist sinnvoll, $\Omega := \{1,\ldots,6\}^2$ sowie (Ω, p) als Laplace-Experiment zu definieren. Dann gilt $A = \{2,4,6\} \times \{1,\ldots,6\}$, $B = \{1,\ldots,6\} \times \{5,6\}$ sowie $C = (\{2,4,6\} \times \{1,3,5\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{2,4,6\})$. Somit folgt $P(A) = P(C) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ sowie $P(B) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P(\{2,4,6\} \times \{5,6\}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B),\\
P(A \cap C) &= P(\{2,4,6\} \times \{1,3,5\}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C),\\
P(B \cap C) &= P((\{2,4,6\} \times \{5\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{6\})) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}\\
&= P(B) \cdot P(C),
\end{aligned}$$

so dass A, B, C paarweise stochastisch unabhängig sind.

b) Sind A, B und C stochastisch unabhängig? $\boxed{3}$

Lösung: Wegen

$$P(A \cap B \cap C) = P(\{2,4,6\} \times \{5\}) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

und Teil a) sind A,B,C in der Tat stochastisch unabhängig.

Aufgabe 5. Eine Bürgerbewegung zur Einrichtung einer Fußgängerzone behauptet, dass mindestens 70 Prozent der Bevölkerung ihr Anliegen unterstützen.

a) Es sei angenommen, dass 70 Prozent der Bevölkerung das Produkt kennen. Bestimmen Sie ein möglichst großes $k \in \mathbb{N}$, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass von 500 zufällig ausgewählten Personen höchstens k das Produkt kennen, maximal 5 Prozent beträgt. Sie dürfen dabei die in der Formel von DeMoivre-Laplace auftretende Näherung verwenden. $\boxed{7}$

Lösung: Es sei X die Zufallsgröße, die angibt, wie viele Personen bei einer Umfrage unter 500 Personen das Vorhaben befürworten. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n := 500$ und $p := 0,7$, also $P^X = B_{n,p}$. Somit gilt nach der

Näherungsformel von DeMoivre-Laplace für $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} P(X \le k) &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \le \frac{k - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}}\right) \\ &= P\left(\frac{X - n \cdot p}{\sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}} \le \frac{k - 350}{\sqrt{105}}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\frac{k-350}{\sqrt{105}}} e^{-\frac{y^2}{2}} \mathrm{d}y \\ &= \Phi\left(\frac{k-350}{\sqrt{105}}\right). \end{aligned}$$

Damit $P(X \le k) \le 0,05$ ist, muss also $\Phi\left(\frac{k-350}{\sqrt{105}}\right) \le 0,05$ gelten. Wegen $\Phi(t) \le 0,05$ für $t \le -1,66$ muss also $\frac{k-350}{\sqrt{105}} \le -1,66$ gelten. Dies ist für $k \le 350 - 1,66 \cdot \sqrt{105} \approx 332,99$ erfüllt. Somit ist $k = 332$ das mit der verwendeten Näherung maximale $k \in \mathbb{N}$, so dass $P(X \le k) \le 0,05$ gilt.

b) In einer Umfrage geben von 500 befragten Personen 318 an, die Einrichtung einer Fußgängerzone zu befürworten. Wie ist vor diesem Hintergrund die Behauptung der Bürgerbewegung zu bewerten? $\boxed{3}$

Lösung: Da in der Umfrage nur 318 Personen das Anliegen unterstützen und nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 Prozent höchstens 332 Personen von 500 Personen das Vorhaben befürworten würden, wenn die Behauptung der Bürgerinitiative stimmen würde, ist es wahrscheinlich, dass die Behauptung nicht stimmt. Man kann aber nicht definitiv sagen, ob die Behauptung der Firma stimmt oder nicht.

Aufgabe 6. Bei einem Glücksspiel darf ein Spieler zunächst seinen Einsatz $a > 0$ selbst wählen und nach Zahlen des Betrages von a Euro ein paar idealer Würfel werfen. Er bekommt anschließend die Summe aus der Augenzahl des ersten Wurfes und dem $\sqrt{a}$-Fachen der Augenzahl des zweiten Wurfes in Euro ausgezahlt. Die Zufallsgrößen X_1 und X_2 mögen die im ersten bzw. zweiten Wurf erzielten Augenzahlen beschreiben.

a) Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße $G(a)$, die den effektiven Gewinn des Spielers bei gewähltem Einsatz a beschreibt. $\boxed{3}$

Lösung: Es ist

$$G(a) = X_1 + \sqrt{a} X_2 - a$$

und somit

$$E(G(a)) = E(X_1) + \sqrt{a} \cdot E(X_2) - a = \frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \sqrt{a} - a.$$

b) Welchen Wert von a sollte der Spieler wählen? Begründen Sie Ihren Vorschlag. $\boxed{4}$

Lösung: Differentiation ergibt

$$\frac{d}{da}E(G(a)) = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a}} - 1,$$

und durch Nullsetzen erhält man als kritischen Wert $a = \frac{49}{16}$, welcher auf den maximalen effektiven Gewinn

$$E\Big(G\Big(\frac{49}{16}\Big)\Big) = \frac{105}{16}$$

führt. Der Spieler sollte also $a = \frac{49}{16}$ wählen, um auf lange Sicht möglichst großen Erlös zu erzielen.

c) Berechnen Sie $E(G^2(a))$ sowie $Var(G(a))$ für $a > 0$. $\boxed{7}$

Lösung: Mit $G := G(a)$ ist nach Ausmultiplikation und Verwendung der Linearität der Erwartungswertbildung

$$\begin{aligned} E(G^2) &= E(X_1^2 + aX_2^2 + a^2 + 2\sqrt{a}X_1X_2 - 2aX_1 - a\sqrt{a}^3X_2) \\ &= E(X_1^2) + aE(X_2^2) + a^2 + 2\sqrt{a}E(X_1X_2) - 2aE(X_1) - 2\sqrt{a}^3E(X_2) \\ &= (1 + a + 2\sqrt{a})E(X_1^2) + a^2 - 2(a + \sqrt{a}^3)E(X_1), \end{aligned}$$

denn X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig. Da $E(X_1) = \frac{7}{2}$ und (bekanntlich)

$$E(X_1^2) = \frac{1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36}{6} = \frac{91}{6},$$

folgt

$$E(G^2) = (1 + a + 2\sqrt{a}) \cdot \frac{91}{6} + a^2 - 7(a + \sqrt{a}^3).$$

Damit liefert die Verschiebungsformel wegen

$$\Big(\frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \sqrt{a} - a\Big)^2 = \frac{49}{4} + \frac{49}{4}a + a^2 + \frac{49}{2}\sqrt{a} - 7a - 7\sqrt{a}^3$$

schließlich

$$\begin{aligned} Var(G) &= E(G^2) - (E(G))^2 \\ &= (1 + a + 2\sqrt{a}) \cdot \frac{91}{6} + a^2 - 7(a + \sqrt{a}^3) - \Big(\frac{7}{2} + \frac{7}{2} \cdot \sqrt{a} - a\Big)^2 \\ &= (1 + a + 2\sqrt{a}) \cdot \frac{91}{6} + a^2 - 7(a + \sqrt{a}^3) \\ &\quad -\Big(\frac{49}{4} + \frac{49}{4}a + a^2 + \frac{49}{2}\sqrt{a} - 7a - 7\sqrt{a}^3\Big) \\ &= \frac{15}{4} \cdot (1 + a + 2\sqrt{a}). \end{aligned}$$

Das Wahrscheinlichkeitstheorie-Team wünscht viel Erfolg!

Name:
Matr.-Nr.:

Aufgabe 7: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Für jede richtige Antwort gibt es zwei Punkte, nicht angekreuzte Teilaufgaben ergeben null Punkte. Für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen, solange die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.

Wenn nichts anderes angegeben ist, seien stets (Ω, p) ein diskretes Zufallsexperiment, $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsgrößen sowie $A, B, C \subset \Omega$ Ereignisse.

		wahr	falsch
1.	Ist $P(A) = 0$, so ist A endlich.		
2.	Sind X und Y positiv korreliert, so gilt $Var(X+Y) \geq Var(X)$.		
3.	Ist Ω endlich, so gilt $P(A\|B) = P(B\|A)$, sofern $A \neq \emptyset \neq B$.		
4.	Ist $P(A) + P(B) > 1$, so ist $A \cap B \neq \emptyset$.		
5.	Ist (Ω, p) ein Laplace-Experiment, so existiert $E(X^3)$.		
6.	Sind X und Y stochastisch unabhängig, so sind X und Y unkorreliert.		
7.	Es gilt $n^{-n} \cdot n! \to 0$ für $n \to \infty$.		
8.	Ist $X \geq 0$, so gilt $E(X^2) \leq E(X^4)$.		
9.	Gilt $A \cap B = \emptyset$, so sind A und B stochastisch unabhängig.		
10.	Sind A und B stochastisch unabhängig sowie B und C stochastisch unabhängig, so sind auch A und C stochastisch unabhängig.		

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	$\sum$