Musterlösung Klausur 1

1) Die Situation läßt sich modellieren als Laplace-Exp. (Ω, P) mit Ω = Menge aller Gäste, $|\Omega| = 500$.

Für die durch

A: ein Gast spricht English

B: ein Gast spricht Spanisch

C: ein Gast spricht Französisch

definierten Ereignisse liest man aus der Aufgabenstellung ab, daß

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{406}{500}, \quad P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{151}{500}, \quad P(C) = \frac{233}{500},$$

$$P(A \cap B) = \frac{104}{500}, \quad P(B \cap C) = \frac{86}{500}, \quad P(C \cap A) = \frac{166}{500} \quad \text{und}$$

$$P(A \cap B \cap C) = 2P(\overline{A \cup B \cup C}). \qquad (1)$$

Laut Inklusions-Exklusionsformel gilt nun aber

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{406}{500} + \frac{151}{500} + \frac{233}{500} - \frac{104}{500} - \frac{86}{500} - \frac{166}{500} + P(A \cap B \cap C) \\ &= \frac{434}{500} + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - \left(\frac{434}{500} + P(A \cap B \cap C)\right) = \frac{66}{500} - P(A \cap B \cap C)$$

$$\underset{(1)}{\Rightarrow} P(A \cap B \cap C) = 2P(\overline{A \cup B \cup C}) = \frac{132}{500} - 2P(A \cap B \cap C)$$

$$\Rightarrow 3P(A \cap B \cap C) = \frac{132}{500} \Rightarrow P(A \cap B \cap C) = \frac{44}{500} = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|}$$

$$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = 44$$

Es sprechen 44 Personen alle drei Sprachen.

2) a) Die Situation entspricht der einer hypergeom. Verteilung. Wir identifizieren dazu (vgl. 2.15 oder 3.17)

Zahlen 1–49	$\hat{=}$	produzierte Geräte		$(N = 49)$
Zahlen der Ziehung	$\hat{=}$	defekte Geräte		$(r = 6)$
Zahlen des Tips	$\hat{=}$	Stichprobe		$(n = 6)$
Anzahl Treffer	$\hat{=}$	Anzahl defekter Geräte in der Stichprobe	$\hat{=}$	k

Ein geeignetes ZE ist somit (Ω, p) mit

$$\Omega = \{0,1,\dots,6\}, \quad p(k) = H_{49,6,6}(k) = \frac{\binom{6}{k}\binom{49-6}{6-k}}{\binom{49}{6}} = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}} \text{ für } k \in \Omega.$$

Das Ereignis eines Gewinns ist gegeben durch

$A = \{3,4,5,6\}$ mit

$$P(A) = p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = \frac{1}{\binom{49}{6}} \cdot \left[\binom{6}{3}\cdot\binom{43}{3} + \binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2} + \binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1} + \binom{6}{6}\cdot\binom{43}{0} \right]$$

$$= \frac{260\,624}{13\,983\,816} = \frac{4654}{249\,711} \approx 1{,}864\,\% \quad (\underline{\text{siehe } 3.17})$$

b) Die Situation entspricht der einer negativen Binomialverteilung zum Parameter $P(A) \approx 1{,}864\%$. (vgl. 4. Übung, 1a)

Ein geeignetes ZE ist somit (Ω', p') mit

$\Omega' = \mathbb{N}$ und $p'(k) = (1-P(A))^{k-1} \cdot P(A)$ für $k \in \Omega'$. (vgl. 3.14)

Gesucht ist der Erwartungswert dieser neg. Binomialverteilung.
(genauer: $E(X)$, wobei die ZG X durch $X(k) = k$ $(k \in \Omega')$ def. ist!)

Es ergibt sich $E(X) \overset{4.13}{=} \frac{1}{P(A)} \approx 53{,}66$.

Man muß somit im Durchschnitt 53,66 Ziehungen/Wochen warten.

3) Es handelt sich um eine Variante des „Geburtstags-Paradoxon" (3. Übung, 1):

Die Situation wird durch ein Laplace-Exp. (Ω, p) mit

$\Omega = \{1,\dots,10.000\}^{300}$ modelliert, wobei die LCD-Bildschirme mit den Nummern von 1 bis 10.000 durchnummeriert sind und für $(\omega_1,\dots,\omega_{300}) \in \Omega$ die Zahl ω_i den Bildschirm angibt, der den i-ten defekten Pixel enthält.

Für das Ereignis

A: die Bildschirme passieren die Produktkontrolle unbeanstandet

gilt

$$A = \{ (\omega_1,\dots,\omega_{300}) \in \Omega \mid \forall\, 1 \le i < j \le 300: \omega_i \neq \omega_j \}$$

mit $|A| = 10.000 \cdot 9999 \cdot \ldots \cdot 9701 = \frac{10.000!}{9.700!}$

und $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{10.000!}{9.700!} \cdot \frac{1}{10.000^{300}}$.

Mit der Stirling-Formel folgt in guter Näherung

$$P(A) \approx \frac{\sqrt{2\pi \cdot 10000}\left(\frac{10000}{e}\right)^{10000}}{\sqrt{2\pi \cdot 9700}\left(\frac{9700}{e}\right)^{9700}} \cdot \frac{1}{10.000^{300}}$$

$$= \sqrt{\frac{10000}{9700}} \cdot \left(\frac{10000}{9700}\right)^{9700} \cdot \frac{1}{e^{300}} = \sqrt{\frac{100}{97}} \cdot \left(\frac{100}{97}\right)^{9700} \cdot \frac{1}{e^{300}}$$

$$= \sqrt{\frac{100}{97}} \cdot \left[\left(\frac{100}{97}\right)^{97} \cdot \frac{1}{e^3}\right]^{100} \approx \underline{1,078\,\%.}$$

4) Die Situation wird durch eine Bernoulli-Vot. $B_{n,p}$ beschrieben mit

$n \mathrel{\hat=}$ Anzahl der Autos, die die Kontrolle in einer Stunde passieren

$p \mathrel{\hat=}$ Wahrschkt., daß ein Auto ein Taxi ist.

$B_{n,p}$ wiederum läßt sich in guter Näherung durch die Poisson-Verteilung P_{np} ersetzen. (für n groß, p klein)

Es ist np hierbei der Erwartungswert der Bernoulli-Vot. $B_{n,p}$ d.h. die Anzahl der Taxis, die die Kontrolle pro Stunde im Mittel passieren.

Fazit: In guter Näherung läßt sich die Situation durch das ZE (Ω, p) mit $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $p(k) = P_9(k) = \frac{9^k}{k!}e^{-9}$. $(k \in \mathbb{N}_0)$ | Vgl. 3.18 und 4. Übung, 3) !

Das Ereignis

A: Es passieren mehr als 7 Taxis den Kontrollpkt

ist gegeben als

$A = \{8, 9, 10, \ldots\}$ mit

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P(\{0,1,\ldots,7\})$$
$$= 1 - \sum_{k=0}^{7} \frac{9^k}{k!} e^{-9} = 1 - e^{-9} \sum_{k=0}^{7} \frac{9^k}{k!} \approx 0,6761.$$

5) Wir definieren ZGen X_1, X_2 durch

X_1: Resultat des 1. Wurfs

X_2: Resultat des 2. Wurfs

Damit gilt $X = X_1 + X_2$, $Y = \max\{X_1, X_2\}$, $Z = \min\{X_1, X_2\}$.
Weiter sind X_1, X_2 stoch. unabh. mit $E(X_1) = E(X_2) = \frac{7}{2}$. (*)

a) $$E(Y \cdot Z) = E(\max\{X_1, X_2\} \cdot \min\{X_1, X_2\})$$
$$= E(X_1 \cdot X_2) \overset{6.19}{=} E(X_1) \cdot E(X_2) \overset{(*)}{=} \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}.$$

b) Für die Korrelation von X und Y ist $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X)E(Y)$ zu untersuchen.

$$E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) \overset{(*)}{=} \frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 7$$

Weiter gilt mit $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$$E(Y) = \frac{1}{36} \sum_{(i,j) \in \Omega} \max\{i,j\} = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \max\{i,j\}$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \Big(\underbrace{i + i + i + \dots + i}_{i\text{-mal}} + \underbrace{(i+1) + \dots + 6}_{= \frac{6 \cdot 7}{2} - \frac{i \cdot (i+1)}{2}} \Big)$$

$$= \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \left(i^2 + 21 - \frac{i^2 + i}{2} \right) = \frac{1}{36} \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} + 21 \right)$$

$$= \frac{1}{36} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 21 \cdot 6 \right] = \frac{161}{36} \approx \underline{4{,}472}$$

$$E(X \cdot Y) = \frac{1}{36} \sum_{(i,j) \in \Omega} (i+j) \max\{i,j\} = \frac{1}{36} \sum_{(i,j) \in \Omega} i \max\{i,j\} + \frac{1}{36} \sum_{(i,j) \in \Omega} j \max\{i,j\}$$

$$\overset{\text{Symmetrie}}{=} \frac{2}{36} \sum_{(i,j) \in \Omega} i \max\{i,j\} = \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} i \max\{i,j\}$$

$$= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{6} i \sum_{j=1}^{6} \max\{i,j\} \overset{\text{siehe oben}}{=} \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{6} i \left(\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} + 21 \right)$$

$$= \frac{1}{18} \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{i^3}{2} - \frac{i^2}{2} + 21 i \right)$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6 \cdot 7}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} + 21 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} \right] = \frac{308}{9} \approx \underline{34{,}22}$$

$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{308}{9} - 7 \cdot \frac{161}{36} = \frac{35}{12} \approx \underline{2{,}917}$$

<u>Fazit</u>: X und Y sind <u>positiv korreliert</u> und damit <u>nicht</u> stoch. unabh., da stoch. unabh. ZGen unkorreliert sind. (vgl. 6.20)

Aufgabe ~~4~~ 6:
In einer Stadt sind alle Taxis entweder grün oder blau. Ein Zeuge eines Unfalls mit Fahrerflucht, der sich in der Abenddämmerung dieser Stadt ereignete, hat ein Taxi erkannt und beschreibt dieses als grün. Hingegen ist bekannt, dass die Farben grün und blau bei schlechten Sichtverhältnissen schwer unterschieden werden können und es wird angenommen, dass ein Taxi dort nur zu 80% mit der richtigen Farbe identifiziert wird.

a) Zeigen Sie, dass das Taxi nicht grün, sondern genauso gut blau hätte sein können, falls es in der Stadt 20% grüne und 80% blaue Taxis gibt.

b) Zeigen Sie, dass trotz der Zeugenaussage das Taxi „eher blau" war, wenn es mehr als 80% blaue Taxis gibt, und geben Sie an, was Sie darunter verstehen.

Lösung:

Sei G die Menge der grünen Taxis und E die Menge der als grün erkannten Taxis, und es gelte

$$P(E|G) = \frac{P(G \cap E)}{P(G)} = 0{,}8$$

$$P(\bar{E}|\bar{G}) = \frac{P(\bar{G} \cap \bar{E})}{P(\bar{G})} = 0{,}8$$

sowie

$$P(G) = 0{,}2$$

a) Durch Umstellen erreichen wir

$$\begin{aligned} P(G|E) &= \frac{P(G \cap E)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E|G) \cdot P(G)}{P(E \cap G) + P(E \cap \bar{G})} \\ &= \frac{P(E|G) \cdot P(G)}{P(E|G) \cdot P(G) + P(E|\bar{G}) \cdot P(\bar{G})}, \end{aligned}$$

was der Anwendung des Satzes von Bayes entspricht. Wir formen um zu

$$P(G|E) = \frac{P(E|G) \cdot P(G)}{P(E|G) \cdot P(G) + (1 - P(\bar{E}|\bar{G})) \cdot P(\bar{G})}$$

und setzen ein

$$P(G|E) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}8 \cdot 0{,}2 + (1 - 0{,}8) \cdot (1 - 0{,}2)} = \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt natürlich auch, dass $P(\bar{G}|E) = 1 - P(G|E) = \frac{1}{2}$ gilt; das Taxi kann genauso grün wie blau gewesen sein, wurde es als grünes Taxi erkannt. $\boxed{1}$

b) Wir rechnen wie in a), lassen nur $P(G)$ erstmal unbestimmt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(G|E) &= \frac{0{,}8 \cdot P(G)}{0{,}8 \cdot P(G) + (1-0{,}8) \cdot (1-P(G))} \\ &= \frac{0{,}8 \cdot P(G)}{0{,}8 \cdot P(G) + 0{,}2 - 0{,}2 \cdot P(G)} \\ &= \frac{0{,}8 \cdot P(G)}{0{,}6 \cdot P(G) + 0{,}2}. \end{aligned}$$

An dieser Stelle machen wir uns bewusst, es gilt $0 \leq P(G) < 0{,}2$ nach Aufgabenstellung.

Sei $P(G) = 0$, dann gilt $P(G|E) = \frac{0}{0{,}2} = 0$ und $P(\bar{G}|E) = 1 - P(G|E) = 1$.

Sei $0 < P(G) < 0,2$, dann gilt

$$P(G|E) = \frac{0{,}8}{0{,}6 + \frac{0{,}2}{P(G)}} < \frac{0{,}8}{0{,}6 + \frac{0{,}2}{0{,}2}} = \frac{1}{2}$$

und somit $P(\bar{G}|E) = 1 - P(G|E) > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

In jedem Fall ist also $P(G|E) < P(\bar{G}|E)$ – selbst wenn der Zeuge ein grünes Taxi gesehen haben will, ist es doch wahrscheinlicher, dass es in Wirklichkeit blau war; egal, was er sieht, durch die schlechte Wahrnehmung und das dafür ungünstige Verhältnis von grünen zu blauen Taxis kann in jedem Fall bei schlechter Sicht von einem blauen Taxi ausgegangen werden. $\boxed{2}$

7) Wir drücken sämtliche Ereignisse bzgl. $\Omega = \{1,\dots,6\}^3$ aus:

$A = \{3,6\} \times \{1,\dots,6\} \times \{1,\dots,6\}$

mit $|A| = 2\cdot 6\cdot 6 = 72$ und $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$

$B = \{1,\dots,6\} \times \{3,6\} \times \{1,\dots,6\}$

mit $|B| = 6\cdot 2\cdot 6 = 72$ und $P(B) = \frac{72}{216} = \frac{1}{3}$

$C = \{(5,4,3), (5,3,4), (4,5,3), (4,3,5), (3,5,4), (3,4,5)$

$(6,5,2), (6,2,5), (5,6,2), (5,2,6), (2,6,5), (2,5,6)\}$

mit $|C| = 12$ und $P(C) = \frac{12}{216} = \frac{1}{18}$

$D = \{(i,j,k) \in \Omega \mid i+j+k \text{ gerade}\}$

$= \{(i,j) \in \{1,\dots,6\}^2 \mid i+j \text{ gerade}\} \times \{2,4,6\} \,\dot\cup\, \{(i,j) \in \{1,\dots,6\}^2 \mid i+j \text{ ung.}\} \times \{1,3,5\}$

mit $|D| = 6\cdot 6\cdot 3 = 108$ und $P(D) = \frac{108}{216} = \frac{1}{2}$.

a) $A \cap B = \{3,6\} \times \{3,6\} \times \{1,\dots,6\}$

mit $|A\cap B| = 2\cdot 2\cdot 6 = 24$ und $P(A\cap B) = \frac{24}{216} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = P(A)\cdot P(B)$ $\checkmark$

$A \cap C = \{(3,5,4), (3,4,5), (6,5,2), (6,2,5)\}$

mit $|A\cap C| = 4$ und $P(A\cap C) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{18} = P(A)\cdot P(C)$ $\checkmark$

$B \cap C = \{(5,3,4), (4,3,5), (5,6,2), (2,6,5)\}$

mit $|B\cap C| = 4$ und $P(B\cap C) = \frac{4}{216} = \frac{1}{54} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{18} = P(B)\cdot P(C)$ $\checkmark$

$A\cap B\cap C = A \cap (B\cap C) = A \cap \{(5,3,4), (4,3,5), (5,6,2), (2,6,5)\} = \emptyset$

mit $|A\cap B\cap C| = 0$ und $P(A\cap B\cap C) = \frac{0}{216} \neq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{18} = P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$.

<u>Fazit:</u> A, B, C sind paarw. stoch. unabh., aber <u>nicht</u> stoch. unabh.

b) $P(B\cap C) = P(B)\cdot P(C)$, siehe a) $\checkmark$

$C \cap D = \{(5,4,3), (5,3,4), (4,5,3), (4,3,5), (3,5,4), (3,4,5)\}$

mit $|C\cap D| = 6$ und $P(C\cap D) = \frac{6}{216} = \frac{1}{36} = \frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2} = P(C)\cdot P(D)$ $\checkmark$

$B \cap D = \{2,4,6\} \times \{6\} \times \{2,4,6\} \,\dot\cup\, \{1,3,5\} \times \{6\} \times \{1,3,5\}$

$\dot\cup\, \{2,4,6\} \times \{3\} \times \{1,3,5\} \,\dot\cup\, \{1,3,5\} \times \{3\} \times \{2,4,6\}$

mit $|B\cap D| = 4\cdot 3\cdot 1\cdot 3 = 36$ und $P(B\cap D) = \frac{36}{216} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = P(B)\cdot P(D)$ $\checkmark$

$B\cap C\cap D = B \cap (C\cap D) = B \cap \{(5,4,3), (5,3,4), (4,5,3), (4,3,5), (3,5,4), (3,4,5)\}$

$= \{(5,3,4), (4,3,5)\}$

mit $|B\cap C\cap D| = 2$ und $P(B\cap C\cap D) = \frac{2}{216} = \frac{1}{108} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{2} = P(B)\cdot P(C)\cdot P(D)$. $\checkmark$

Fazit: A, B, C sind paarw. stoch. unabh. und auch stoch. unabh.

8) a) Die ZG X_i $(1 \leq i \leq n)$ gebe das Resultat des i-ten Wurfes an.

Die ZGen X_i sind dann stoch. unabh. mit

$$P^{X_i} = P^{X_j} \quad \text{für } i \neq j,$$

$$\mu := E(X_i) = \frac{7}{2}, \quad \sigma^2 := Var(X_i) = \frac{35}{12} \quad \text{und} \quad X = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Setzen wir dies in den Zentr. Grenzwertsatz 7.2

$$P\left(a \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sqrt{n}\,\sigma} \leq b\right) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

ein, so ergibt sich

$$P\left(a \leq \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \frac{7}{2}}{\sqrt{n}\sqrt{\frac{35}{12}}}}_{= \frac{X - \frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}}} \leq b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

also $$P\left(a \leq \frac{X - \frac{7}{2}n}{\sqrt{\frac{35}{12}n}} \leq b\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \qquad (*)$$

b) Wir verwenden (*):

$$P(3372 \leq X \leq 3547) = P(-128 \leq X - 3500 \leq 47)$$

$$= P\left(\underbrace{-\frac{128}{\sqrt{\frac{35}{12}\cdot 1000}}}_{\approx -2{,}37} \leq \frac{X-3500}{\sqrt{\frac{35}{12}\cdot 1000}} \leq \underbrace{\frac{47}{\sqrt{\frac{35}{12}\cdot 1000}}}_{\approx 0{,}87}\right) \overset{(*)}{\approx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-2{,}37}^{0{,}87} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy$$

$$= \Phi(0{,}87) - \Phi(-2{,}37) = \Phi(0{,}87) + \Phi(2{,}37) - 1 \approx 0{,}8079 + 0{,}9911 - 1$$

$$= \underline{0{,}799}$$

9) ① FALSCH!

Mit $n = 3000$, $p = 0{,}003$ ist $\sqrt{np(1-p)} \approx 2{,}995 < 3$. (vgl. 7.4)

② FALSCH!

Mit $A = B = \emptyset$ gilt $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 = P(A) \cdot P(B)$,
d.h. A, B sind stoch. unabh. Wegen $P(B) = P(\emptyset) = 0$ ist $P(A|B)$ <u>nicht</u> def!

③ WAHR! (vgl. 1.6 & 4.1)

④ WAHR!

Für Laplace-Experimente gilt $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \in \mathbb{Q}$ mit $|A|, |\Omega| \in \mathbb{N}_0$.

⑤ FALSCH!

Sei z.B. (Ω, p) mit $\Omega = \{0,1\}$, $p(0) = 0$, $p(1) = 1$. Dann gilt mit $A = B = \{0\}$
$P(A \cup B) = P(\{0\}) = 0 = P(A) + P(B)$ und $A \cap B = \{0\} \neq \emptyset$.

⑥ WAHR!

$E(X^2 + Y^2)$ ex. $\overset{4.21}{\Rightarrow}$ $E(X^2), E(Y^2)$ ex. $\overset{4.24}{\Rightarrow}$ $Var(X), Var(Y)$ ex.

⑦ FALSCH!

Für $\lambda < 0$ und $k \in \Omega$ ist $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} < 0$ und damit $p(k) \notin [0,1]$.

⑧ WAHR!

$Cov(X,Y)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y)$ gilt für $Var(X), Var(Y) > 0$ laut 4.37(b).
Ist hingegen $Var(X) = 0$, so folgt $P(X = c) = 1$ für ein $c \in \mathbb{R}$. (siehe 4.31(d))
Damit aber folgt $Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E(c \cdot Y) - c \cdot E(Y) = 0$
und $Cov(X,Y)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y)$ gilt auch hier.

⑨ WAHR!

Mit $0 < P(A) < P(B)$ sind $P(A|B)$ und $P(B|A)$ definiert. Weiter gilt

$$0 < P(A) < P(B) < 1 \Rightarrow \frac{1}{P(B)} < \frac{1}{P(A)} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A|B) \leq P(B|A).$$

⑩ FALSCH!

Für (Ω, p) geg. durch $\Omega = \mathbb{R}$, $p(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } \omega = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ gilt $Z_n \xrightarrow{P} 0$.

überprüfe dazu Def. 5.7.