Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Dr. Daniel Herden

Essen, den 14.02.2012

Abschlußklausur zur Stochastik für Lehramt

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 50 der 100 möglichen Punkte erreicht werden.
Runden Sie Näherungswerte bitte jeweils auf vier signifikante Dezimalstellen: $\pi \approx 3,142$.

Aufgabe 1: Von den 500 Gästen einer Fachtagung sprechen 406 Englisch, 151 Spanisch und 233 Französisch. Eine Reihe von Gästen ist sogar mindestens zweier dieser Sprachen mächtig: 104 Personen sprechen sowohl Englisch als auch Spanisch, 86 sowohl Spanisch als auch Französisch und 166 sowohl Französisch als auch Englisch. Wie viele Gäste sprechen alle drei Sprachen, wenn zusätzlich bekannt ist, dass diese Zahl doppelt so groß ist wie die Anzahl derjenigen Gäste, die keine der drei Sprachen sprechen? $\boxed{10}$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die folgende vereinfachte Variante des Lotto „6 aus 49“:

Es findet jede Woche genau eine Lottoziehung statt, bei der zufällig und ohne Zurücklegen sechs der Zahlen 1 *bis* 49 *gezogen werden. Ein Lottotip besteht ebenfalls aus der Angabe von sechs der Zahlen* 1 *bis* 49*, wobei man einen Preis gewinnt, sobald man mindestens drei der sechs Zahlen der nächsten Ziehung korrekt vorhersagt.*

a) Es bezeichne A das Ereignis, dass ein vorab gemachter Lottotip einen Preis gewinnt. Beschreiben Sie die Situation durch ein geeignetes diskretes Zufallsexperiment (Ω, p) mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P, geben Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω an und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. $\boxed{5}$

b) Wie viele Wochen muss man durchschnittlich bis zum ersten Lottogewinn warten, wenn man jede Woche genau einen Lottotip für die wöchentliche Ziehung abgibt? Geben Sie hierzu zunächst ein geeignetes diskretes Zufallsexperiment (Ω', p') an und formulieren Sie die Frage mit Bezug auf dieses Experiment. $\boxed{5}$

   Hinweis: Sie dürfen o.E. annehmen, dass der Lottotip immer auf die Zahlen 1 bis 6 erfolgt.

Aufgabe 3: Eine Lieferung von 10.000 billigen LCD-Bildschirmen enthalte insgesamt 300 kaputte Pixel. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass diese Lieferung die Produktkontrolle unbeanstandet passiert, falls ein Gerät zurückgewiesen wird, sobald es mindestens zwei kaputte Pixel aufweist. Geben Sie sowohl den exakten Wert für diese Wahrscheinlichkeit an als auch einen durch die Stirling-Formel gewonnenen Näherungswert auf vier signifikante Dezimalstellen. $\boxed{10}$

Hinweis: Stellen Sie sich die Situation vor, dass 300 fehlerhafte Pixel auf 10.000 LCD-Bildschirme verteilt werden.

Aufgabe 4: Bei einer Verkehrskontrolle an einer stark befahrenen Straße stellt die Polizei fest, dass durchschnittlich 9 Taxis pro Stunde den Kontrollpunkt passieren. Bestimmen Sie auf der Grundlage dieser Beobachtung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass innerhalb einer Stunde mehr als 7 Taxis diesen Kontrollpunkt passieren, indem Sie eine geeignete Poisson-Verteilung als Näherung ansetzen. $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Ein idealer Spielwürfel werde zweimal hintereinander geworfen. Die Zufallsgrößen X, Y und Z geben dabei in dieser Reihenfolge die Summe, das Maximum und das Minimum dieser beiden Augenzahlen an.

a) Berechnen Sie $E(Y \cdot Z)$. $\boxed{2}$

b) Untersuchen Sie X und Y auf Korrelation und stochastische Unabhängigkeit. $\boxed{8}$

Aufgabe 6: In einer Stadt sind alle Taxis entweder grün oder blau. Ein Zeuge eines Unfalls mit Fahrerflucht, der sich in der Abenddämmerung dieser Stadt ereignete, hat ein Taxi erkannt und beschreibt dieses als grün. Hingegen ist bekannt, dass die Farben grün und blau bei schlechten Sichtverhältnissen schwer unterschieden werden können, und es wird angenommen, dass ein blaues Taxi nur in 80% aller Fälle als blau und ein grünes Taxi nur in 80% aller Fälle als grün erkannt wird.

a) Zeigen Sie, dass das Taxi nicht grün, sondern genauso gut blau hätte sein können, falls es in der Stadt 20% grüne und 80% blaue Taxis gibt. $\boxed{4}$

b) Zeigen Sie, dass trotz der Zeugenaussage das Taxi „eher blau“ war, wenn es mehr als 80% blaue Taxis gibt, und geben Sie an, was Sie darunter verstehen. $\boxed{6}$

Aufgabe 7: Ein idealer Würfel werde dreimal hintereinander geworfen. Dabei seien die Ereignisse A: „die Augenzahl im ersten Wurf ist durch 3 teilbar“, B: „die Augenzahl im zweiten Wurf ist durch 3 teilbar“, C: „das Produkt der Augenzahlen ist 60“ und D: „die Augensumme ist gerade“ definiert. Untersuchen Sie jeweils, ob die angegebenen Ereignisse stochastisch unabhängig sind und ob sie paarweise stochastisch unabhängig sind.

a) A, B, C. $\boxed{5}$

b) B, C, D. $\boxed{5}$

Aufgabe 8: Die Zufallsgröße X gebe die Augensumme beim n-fachen unabhängigen Wurf eines idealen Spielwürfels an.

a) Leiten Sie in Analogie zur Formel von de Moivre-Laplace aus dem Zentralen Grenzwertsatz eine Näherungsformel für die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ab. $\boxed{6}$

Hinweis: Gesucht ist eine Formel von der Form $P(a \leq \,?\, \leq b) \approx \int_a^b \,?$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(3372 \leq X \leq 3547)$ für $n = 1000$. $\boxed{4}$

Das Stochastik-Team wünscht viel Erfolg!

Name:
Matr.-Nr.:

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Falls im folgenden nicht näher spezifiziert bezeichne (Ω, p) immer ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^* und Wahrscheinlichkeitsverteilung P, wobei A, B Ereignisse und X, Y, Z_n $(n \in \mathbb{N})$ Zufallsgrößen über Ω seien.

		WAHR	FALSCH
1.	Die Bernoulli-Kette der Länge 3000 zum Parameter $0,003$ genügt der Laplace-Bedingung.	☐	☐
2.	Sind A und B stochastisch unabhängig, so existiert $P(A\|B)$ und es gilt $P(A\|B) = P(A)$.	☐	☐
3.	Die Wahrscheinlichkeit, beim dreifachen Wurf eines idealen Spielwürfels die Augensumme 10 zu erreichen, ist $0,125$.	☐	☐
4.	Ist P(A) irrational, so ist (Ω, p) kein Laplace-Experiment.	☐	☐
5.	Gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, so folgt $A \cap B = \emptyset$.	☐	☐
6.	Existiert $E(X^2+Y^2)$, so existieren auch $Var(X)$ und $Var(Y)$.	☐	☐
7.	Durch $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$ $(k \in \Omega)$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ein abzählbar-unendliches Zufallsexperiment definiert.	☐	☐
8.	Es gilt $Cov(X,Y)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y)$.	☐	☐
9.	Gilt $0 < P(A) < P(B) < 1$, so folgt $P(A\|B) \leq P(B\|A)$.	☐	☐
10.	Die für $\Omega = \mathbb{R}$ durch $Z_n(x) = nx^2$ $(n \in \mathbb{N}, x \in \Omega)$ definierte Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist niemals stochastisch konvergent.	☐	☐

Für r richtige und f falsche gegebene Antworten erhalten Sie $2 \cdot \max\{0, r - f\}$ Punkte. Nicht beantwortete Fragen werden dabei nicht gewertet. $\boxed{20}$

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ