Musterlösung zur Nachklausur

1) Es seien die Ereignisse

A_1: „eine Person ist < 20 Jahre alt"

A_2: „eine Person ist zwischen 20 und 60 Jahren alt"

A_3: „eine Person ist > 60 Jahre alt"

B: „eine Person sieht die Quizshow"

definiert. Die Folgenden Wahrschkten sind bekannt:

$P(B|A_1) = 0{,}16$, $P(B|A_2) = 0{,}45$, $P(B|A_3) = 0{,}64$,

$P(A_1) = 0{,}2$, $P(A_2) = P(\overline{A_1 \cup A_3}) = 1 - P(A_1) - P(A_3) = 0{,}55$, $P(A_3) = 0{,}25$.

a) Gesucht ist $P(B)$. Da A_1, A_2, A_3 paarw. disjunkt mit $P(A_i) > 0$ für $i \in \{1,2,3\}$ und $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$ sind, liefert der Satz von der totalen Wkt

$$P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3) = 43{,}95\%$$

b) Gesucht ist $P(A_1|\overline{B})$. Mit dem Satz von Bayes gilt

$$P(A_1|\overline{B}) = \frac{P(\overline{B}|A_1) \cdot P(A_1)}{P(\overline{B})},$$

wobei $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 0{,}5605$ und $P(\overline{B}|A_1) = 1 - P(B|A_1) = 0{,}84$.

Es folgt $P(A_1|\overline{B}) = \dfrac{0{,}84 \cdot 0{,}2}{0{,}5605} = \dfrac{336}{1121} \approx 29{,}97\%$

2) a) Es sei

$$\Omega := \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, \ldots, 20\}^3 \mid |\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}| = 3 \},$$

wobei $(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega$ bedeutet, daß als i-te Kugel die Kugel mit der Nummer ω_i gezogen wird.

Außerdem sei $p(\omega) := \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{20 \cdot 19 \cdot 18} = \dfrac{1}{6840}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist (Ω, p) ein für die Situation geeignetes Laplace-Experiment.

b) Als Teilmenge von Ω läßt sich das Ereignis A wie folgt darstellen:

$$A = \{ (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \Omega \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \}.$$

c) Da die Ziehung <u>ohne</u> Zurücklegen erfolgt, sind die gezogenen Zahlen automatisch verschieden. Es gilt also auch

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, \dots, 20\}^3 \mid 1 \leq \omega_1 < \omega_2 < \omega_3 \leq 20\}.$$

Diese Menge entspricht aber gerade der Menge aller Kombinationen <u>ohne</u> Zurücklegen aus drei Zahlen der Menge $\{1, \dots, 20\}$. Es gilt somit

$$|A| = \binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{6} = 1140 \quad \text{und} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1667.$$

d) Da die Ziehung <u>mit</u> Zurücklegen erfolgt, gilt diesmal

$$\Omega := \{1, \dots, 20\}^3 \quad \text{mit} \quad |\Omega| = 20^3 = 8000 \quad \text{und}$$

$$A = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) \in \{1, \dots, 20\}^3 \mid 1 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \omega_3 \leq 20\}.$$

Diese Menge entspricht aber gerade der Menge aller Kombinationen <u>mit</u> Zurücklegen aus drei Zahlen der Menge $\{1, \dots, 20\}$. Es gilt somit

$$|A| = \binom{20+3-1}{3} = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6} = 1540 \quad \text{und} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{77}{400} = 0{,}1925.$$

3) Die Größen X_1 und X_2 sind stochastisch unabhängig mit

$$E(X_i) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$$

$$E(X_i^2) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} = \frac{91}{6}$$

$$E(X_i^4) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k^4 = \frac{1}{6} \cdot 2275 = \frac{2275}{6} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}.$$

a) Insbesondere folgt

$$E(X) = E(X_1^2 + X_2^2) = E(X_1^2) + E(X_2^2) = \frac{91}{6} + \frac{91}{6} = \frac{91}{3} \approx 30{,}33$$

und

$$\begin{aligned} E(X^2) &= E\left((X_1^2 + X_2^2)^2\right) = E(X_1^4 + 2X_1^2 X_2^2 + X_2^4) \\ &= E(X_1^4) + 2E(X_1^2 X_2^2) + E(X_2^4) \\ &= E(X_1^4) + 2E(X_1^2) \cdot E(X_2^2) + E(X_2^4), \\ &= \frac{21931}{18} \approx 1218 \end{aligned}$$

da mit X_1, X_2 auch X_1^2, X_2^2 stochastisch unabhängig sind.

Mit dem Verschiebungssatz folgt

$$\begin{aligned}
Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= E(X_1^4) + 2E(X_1^2)\cdot E(X_2^2) + E(X_2^4) - [E(X_1^2)+E(X_2^2)]^2 \\
&= E(X_1^4) + E(X_2^4) - E(X_1^2)^2 - E(X_2^2)^2 \\
&= \frac{2275}{3} - 2\cdot\left(\frac{91}{6}\right)^2 = \frac{5369}{18} \approx 298{,}3.
\end{aligned}$$

[oder alternativ: Da X_1^2, X_2^2 stochastisch unabhängig sind, gilt

$$Var(X) = Var(X_1^2 + X_2^2) = Var(X_1^2) + Var(X_2^2) = \ldots$$

b) Für die Korrelation berechnen wir

$$\begin{aligned}
Cov(Y,Z) &= E(YZ) - E(Y)E(Z) \\
&= E((X_1-X_2)(X_1+X_2)) - E(X_1-X_2)E(X_1+X_2) \\
&= E(X_1^2 - X_2^2) - [\underbrace{E(X_1)-E(X_2)}_{=0}][E(X_1)+E(X_2)] \\
&= E(X_1^2-X_2^2) = E(X_1^2) - E(X_2^2) = 0.
\end{aligned}$$

Die Zufallsgrößen Y, Z sind damit unkorreliert.

Für stochastische Unabhängigkeit ist

$$P(Y=a \wedge Z=b) = P(Y=a)\cdot P(Z=b)$$

für alle $a,b \in \mathbb{R}$ zu überprüfen. Es gilt aber offensichtlich

$$P(Y=5 \wedge Z=2) = P(X_1-X_2=5 \wedge X_1+X_2=2) = 0 \neq$$

$$\underbrace{P(X_1-X_2=5)}_{\substack{>0,\\ \text{da z.B. für}\\ X_1=6,\, X_2=1\\ \text{erfüllt!}}} \cdot \underbrace{P(X_1+X_2=2)}_{\substack{>0,\\ \text{da z.B. für}\\ X_1=X_2=1\\ \text{erfüllt!}}} = P(Y=5)\cdot P(Z=2).$$

Die Zufallsgrößen Y,Z sind damit <u>nicht</u> stoch. unabhängig.

4) Es sei $\Omega := \{0,4\} \times \{0,6\} \times \{1,\dots,6\}^2$ und $p(\omega) := \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^2 \cdot 6^2} = \frac{1}{144}$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann ist (Ω, p) ein für die Situation geeignetes Laplace-Experiment, wobei für $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \in \Omega$ durch ω_i jeweils die Punktzahl des i-ten Wurfes gegeben ist. Es gilt

$$A = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \in \Omega \mid 12 \mid \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4\}$$
$$= \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \in \Omega \mid \omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4 = 12\}$$
$$= \{(0,0,\omega_3,\omega_4) \in \Omega \mid \omega_3+\omega_4 = 12\} \,\dot\cup\, \{(0,6,\omega_3,\omega_4) \mid \omega_3+\omega_4 = 6\}$$
$$\dot\cup\, \{(4,0,\omega_3,\omega_4) \in \Omega \mid \omega_3+\omega_4 = 8\} \,\dot\cup\, \{(4,6,\omega_3,\omega_4) \mid \omega_3+\omega_4 = 2\}$$
$$= \{(0,0,6,6), (0,6,1,5), (0,6,2,4), (0,6,3,3), (0,6,4,2), (0,6,5,1),$$
$$(4,0,2,6), (4,0,3,5), (4,0,4,4), (4,0,5,3), (4,0,6,2), (4,6,1,1)\}$$

$$B = \{(\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4) \in \Omega \mid 3 \mid \omega_1+\omega_2+\omega_3\}$$
$$= \{0\} \times \{0\} \times \{3,6\} \times \{1,\dots,6\} \,\dot\cup\, \{0\} \times \{6\} \times \{3,6\} \times \{1,\dots,6\}$$
$$\dot\cup\, \{4\} \times \{0\} \times \{2,5\} \times \{1,\dots,6\} \,\dot\cup\, \{4\} \times \{6\} \times \{2,5\} \times \{1,\dots,6\}$$
$$= \{0\} \times \{0,6\} \times \{3,6\} \times \{1,\dots,6\} \,\dot\cup\, \{4\} \times \{0,6\} \times \{2,5\} \times \{1,\dots,6\}$$

$$C = \{4\} \times \{0,6\} \times \{1,\dots,6\}^2, \quad D = \{0,4\} \times \{6\} \times \{1,\dots,6\}^2$$

Somit folgt $P(A) = \frac{12}{144} = \frac{1}{12}$, $P(B) = \frac{2\cdot 2\cdot 6 + 2\cdot 2\cdot 6}{144} = \frac{1}{3}$,

$P(C) = \frac{2\cdot 6^2}{144} = \frac{1}{2}$, $P(D) = \frac{2 \cdot 6^2}{144} = \frac{1}{2}$.

<u>Zu A, B, C:</u>

$$A \cap B = \{(0,0,6,6), (0,6,3,3), (4,0,2,6), (4,0,5,3)\}$$
$$A \cap C = \{(4,0,2,6), (4,0,3,5), (4,0,4,4), (4,0,5,3), (4,0,6,2), (4,6,1,1)\}$$
$$B \cap C = \{4\} \times \{0,6\} \times \{2,5\} \times \{1,\dots,6\}$$
$$A \cap B \cap C = \{(4,0,2,6), (4,0,5,3)\}$$

Somit folgt

$$P(A \cap B) = \frac{4}{144} = \frac{1}{36} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} = P(A) \cdot P(B),$$
$$P(A \cap C) = \frac{6}{144} = \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C),$$
$$P(B \cap C) = \frac{2 \cdot 2 \cdot 6}{144} = \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C),$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{144} = \frac{1}{72} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C).$$

Somit sind A, B, C stochastisch unabhängig.

zu A, B, D:

$$A \cap B \cap D = (A \cap B) \cap D = \{(0,6,3,3)\}, \text{ also}$$

$$P(A \cap B \cap D) = \frac{1}{144} \neq \frac{1}{72} = \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(D).$$

Somit sind A, B, D nicht stoch. unabhängig.

5) a) Es gilt

$$E(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x \cdot P(X = x) = 1 \cdot 0{,}5 + 5 \cdot 0{,}3 + 10 \cdot 0{,}1 + 0 \cdot 0{,}1 = 3 \quad \text{und}$$

$$E(X^2) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x^2 \cdot P(X = x) = 1^2 \cdot 0{,}5 + 5^2 \cdot 0{,}3 + 10^2 \cdot 0{,}1 + 0^2 \cdot 0{,}1 = 18.$$

Mit dem Verschiebungssatz erhält man

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 18 - 3^2 = 9.$$

b) Sei X_i für $i \in \{1, \dots, 100\}$ die Zufallsgröße, die den im i-ten Spiel erzielten Gewinn angibt. Dann sind $X_1, \dots, X_{100}$ stoch. unabh. mit $E(X_i) = E(X) = 3$ und $Var(X_i) = Var(X) = 9$.

Für den Gesamtgewinn Y als Zufallsgröße gilt $Y = \sum_{i=1}^{100} X_i$, also

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} E(X_i) = 100 \cdot E(X) = 300,$$

$$Var(Y) = Var\left(\sum_{i=1}^{100} X_i\right) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) = 100 \cdot Var(X) = 900.$$

Mit der Tschebyscheff-Ungleichung gilt nun für $\varepsilon > 0$

$$P(|Y - E(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2} \quad \text{bzw.}$$

$$P(|Y - E(Y)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{Var(Y)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{900}{\varepsilon^2}.$$

Für $1 - \frac{900}{\varepsilon^2} \geq 0{,}96$ folgt $\varepsilon^2 \geq 22.500$ und $\varepsilon \geq 150$.

Y liegt mit Wkt $\geq 96\%$ im Intervall

$$(E(Y) - 150; E(Y) + 150) = (300 - 150; 300 + 150) = (150, 450).$$

Beachtet man außerdem, daß Y ganzzahlig ist,

läßt sich dieses Intervall verbessern zu $I = [151; 449]$.

vgl. Üb5, Aufg 3

6) Es sei $\Omega := \{1,\dots,6\}^{12}$ und $p : \Omega \to [0,1]$, $p(\omega) := \frac{1}{6^{12}}$ für $\omega \in \Omega$.
Für $(\omega_1,\dots,\omega_{12}) \in \Omega$ gibt dabei ω_i das Resultat des i-ten Wurfes an.
Wir betrachten die Ereignisse
A: „jede der Augenzahlen 1,2,3 wird mind. einmal erzielt"
A_i: „die Augenzahl i kommt nicht vor"
Dann gilt als Teilmenge von Ω

$$A = \{(\omega_1,\dots,\omega_{12}) \in \Omega \mid \{1,2,3\} \subseteq \{\omega_1,\dots,\omega_{12}\}\},$$
$$\overline{A} = \{(\omega_1,\dots,\omega_{12}) \in \Omega \mid \{1,2,3\} \nsubseteq \{\omega_1,\dots,\omega_{12}\}\},$$
$$A_i = \{(\omega_1,\dots,\omega_{12}) \in \Omega \mid \{i\} \nsubseteq \{\omega_1,\dots,\omega_{12}\}\}.$$

Da insb. $\overline{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ gilt mit Inklusion-Exklusion

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$$
$$= 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Für $1 \le i_1 < \dots < i_k \le 6$ gilt offensichtlich

$$A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} = (\{1,\dots,6\} \setminus \{i_1,\dots,i_k\})^{12}, \text{ so daß}$$
$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| = (6-k)^{12} \text{ und } P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = \frac{(6-k)^{12}}{|\Omega|} = \frac{(6-k)^{12}}{6^{12}} = \left(1-\frac{k}{6}\right)^{12}.$$

Einsetzen liefert

$$P(A) = 1 - P(A_1) - P(A_2) - P(A_3) + P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$
$$= 1 - 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{12} + 3 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^{12} - \left(\frac{3}{6}\right)^{12} \approx 0{,}6864.$$

8) Es sei k die Anzahl der angenommenen Buchungen, wobei angenommen wird, daß jede Buchung mit Whkt 10% storniert wird. Weiter sei X die Zufallsgröße, die angibt, wie viele der k Buchungen tatsächlich angetreten werden. Dann ist X binomialverteilt mit den Parametern $n := k$ und $p := 0{,}9$. Somit gilt nach der Näherungsformel von De Moivre-Laplace:

$$P(X \le 600) = P\left(\frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{600 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$
$$= \phi\left(\frac{600 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \phi\left(\frac{600 - 0{,}9k}{\sqrt{k \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}}\right) = \phi\left(\frac{600 - 0{,}9k}{0{,}3\sqrt{k}}\right).$$

Da eine Überbuchung mit 97,5% Whkt ausgeschlossen werden soll, muß $P(X \le 600) = \phi\left(\frac{600 - 0{,}9k}{0{,}3\sqrt{k}}\right) \ge 0{,}975$ gelten.

Wegen $\phi(t) \geq 0{,}975$ für $t \geq 1{,}96$ muß also

$$\frac{600-0{,}9k}{0{,}3\sqrt{k}} \geq 1{,}96 \iff \frac{2000-3k}{\sqrt{k}} \geq 1{,}96 \iff 3k + 1{,}96\sqrt{k} - 2000 \leq 0$$

$$\iff \sqrt{k} \in \Bigg[\underbrace{\frac{-1{,}96 - \sqrt{1{,}96^2 + 4\cdot 3\cdot 2000}}{2\cdot 3}}_{<0} ; \frac{-1{,}96 + \sqrt{1{,}96^2 + 4\cdot 3\cdot 2000}}{2\cdot 3} \Bigg]$$

$$\iff \sqrt{k} \leq \frac{-1{,}96 + \sqrt{1{,}96^2 + 4\cdot 3\cdot 2000}}{2\cdot 3} \iff k \leq \left(\frac{-1{,}96 + \sqrt{1{,}96^2 + 4\cdot 3\cdot 2000}}{2\cdot 3} \right)^2$$

$$\approx 650{,}0$$

Es dürfen damit max. 650 Buchungen angenommen werden.

7) a) Wir formen um

$$w_n = \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \ldots \cdot \frac{2n\cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{2\cdot 4 \cdot \ldots \cdot 2n}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)} \cdot \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^2}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2n} \cdot \ldots \cdot \frac{(2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (2\cdot 4\cdot \ldots \cdot 2n)^4 = \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(2n+1)!} \cdot (2^n \cdot 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n)^4$$

$$= \frac{1}{(2n)!} \cdot \frac{1}{(2n+1)(2n)!} \cdot (2^n \cdot n!)^4 = \frac{2^{4n}}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2}.$$

b) Mit der Stirling-Formel folgt nun

$$w_n = \frac{2^{4n}}{2n+1} \cdot \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^2} \approx \frac{2^{4n}}{2n+1} \cdot \frac{\left[\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right]^4}{\left[\sqrt{2\pi \cdot 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\right]^2}$$

$$= \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n}^4 \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}}{\sqrt{4\pi n}^2 \left(\frac{2n}{e}\right)^{4n}} = \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{(2\pi n)^2}{4\pi n} = \frac{1}{2n+1} \cdot \pi n = \frac{n}{2n+1} \cdot \pi$$

c) Es gilt damit

$$\lim_{n\to\infty} w_n = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

9) (1.) FALSCH! (siehe 4.7b bzw. Üb 6, Aufg 3)

(2.) WAHR! (siehe 3.19)

(3.) WAHR!

Die Whkt mit zwei Würfeln die Augensumme 7 zu erzielen ist $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Gesucht wird der Erwartungswert zu einer neg. Binomialverteilung zum Parameter $p = \frac{1}{6}$: $\frac{1}{p} = 6$.

④ FALSCH!

Sei X eine Zufallsgröße, für die $E(X)$ nicht existiert, siehe z.B. 4.10b.
Sei $Y = 0$ konstant. Dann existiert zwar $E(X^2 \cdot Y^2) = E(X^2 \cdot 0^2) = E(0) = 0$,
da $E(X)$ nicht existiert, existiert aber auch nicht $Var(X)$, siehe Def. 4.23.

⑤ WAHR!

Mit Inklusion-Exklusion gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
Gilt auch $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, so folgt $P(A \cap B) = 0$.
Ist (Ω, p) ein LE, so bedeutet das aber $0 = P(A \cap B) = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} \Rightarrow A \cap B = \emptyset$.

⑥ WAHR!

Mit 4.33 gilt $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$.
Gilt auch $Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$, so folgt $Cov(X,Y)$, X, Y sind unkorreliert.

⑦ FALSCH!

Die Gleichung besitzt $\binom{99+3-1}{2} = \binom{101}{2} = 5050$ Lösungen, siehe 2.12a.

⑧ FALSCH!

Wären A, B, C stoch. unabhängig, so folgte für das LE (Ω, p)

$$\frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow |A \cap B \cap C| = \frac{|\Omega|}{48} = \frac{6^3}{48} = 4\tfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \ \lightning$$

⑨ FALSCH!

Wir betrachten die Ereignisse

A: „die Urne enthält zwei rote Kugeln"

B: „die gezogene Kugel ist rot"

Es ist bekannt, daß $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B|A) = 1$, $P(B|\bar{A}) = \frac{1}{2}$. Gesucht: $P(A|B)$.

Es gilt $P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ (totale Whkt)

und $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{3/4} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$ (Bayes)

[Anm.: Diese Aufgabe läßt sich auch viel leichter mit Whkt-Bäumen lösen!

⑩ WAHR!

Sei $P(A|B) = P(A|\bar{B}) = 1$. Mit totaler Whkt gilt

$$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\bar{B}) \cdot P(\bar{B}) = 1 \cdot P(B) + 1 \cdot P(\bar{B}) = 1 \cdot [\underbrace{P(B) + P(\bar{B})}_{=1}] = 1.$$

Nach Def. gilt somit $P(A) = 1 = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, A, B sind stoch. unabhängig!