Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Dr. Daniel Herden

Essen, den 03.04.2012

Nachklausur zur Stochastik für Lehramt

Bearbeitungszeit: mind. 180 Minuten

• Die Klausur ist auf jeden Fall bestanden, wenn 50 der 100 möglichen Punkte erreicht werden.

• **Hilfsmittel sind** außer unbeschriebenem Papier, Schreibutensilien, Taschenrechnern und einem beidseitig von Hand beschriebenen DIN-A4-Blatt keine erlaubt. **Ausgeschlossen sind insbesondere** Handies, Formelsammlungen, Vorlesungsmitschriften und alte Übungsaufgaben.

• Runden Sie Näherungswerte bitte jeweils auf vier signifikante Dezimalstellen: $\pi \approx 3,142$.

==

Aufgabe 1: Die Quizshow „Risiko“ wird von 16 Prozent der Altersgruppe < 20 Jahre, 45 Prozent der Altersgruppe 20–60 Jahre und 64 Prozent der Altersgruppe > 60 Jahre gesehen. Es sei außerdem bekannt, dass 20 Prozent der Bevölkerung jünger als 20 und 25 Prozent der Bevölkerung älter als 60 Jahre sind.

a) Wieviel Prozent der Bevölkerung sehen die Quizshow? $\boxed{4}$

b) Eine Person gibt an, sich die Quizshow **nicht** anzusehen.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist sie jünger als 20 Jahre alt? $\boxed{6}$

Aufgabe 2: In einer Urne befinden sich 20 Kugeln, die mit den Zahlen von 1 bis 20 beschriftet sind. Aus dieser Urne werden drei Kugeln nacheinander und **ohne** Zurücklegen gezogen. Weiter sei A das Ereignis „die Zahlen der gezogenen Kugeln bilden in der Reihenfolge der Ziehung eine monoton wachsende Folge“.

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p). $\boxed{2}$

b) Stellen Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar. $\boxed{2}$

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$. $\boxed{3}$

d) Berechnen Sie $P(A)$ auch für den Fall, dass die Ziehung **mit** Zurücklegen erfolgt. $\boxed{3}$

Aufgabe 3: Ein idealer Würfel werde zweimal hintereinander geworfen. Für $i \in \{1, 2\}$ gebe X_i die im i-ten Wurf erzielte Augenzahl an. Es seien weiter die Zufallsgrößen $X = X_1^2 + X_2^2$, $Y = X_1 - X_2$ und $Z = X_1 + X_2$ definiert.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$. $\boxed{5}$

b) Berechnen Sie $Cov(Y, Z)$ und untersuchen Sie Y, Z auf stochastische Unabhängigkeit. $\boxed{5}$

Aufgabe 4: Bei einem Glücksspiel wird zunächst zweimal hintereinander eine ideale Münze und anschließend zweimal hintereinander ein idealer Würfel geworfen. Es werden Punkte vergeben:

	für „Zahl“	für „Kopf“
Beim 1. Münzwurf	4 Punkte	0 Punkte
Beim 2. Münzwurf	6 Punkte	0 Punkte

Addiert man zu diesen Punkten die Augensumme der beiden Würfelwürfe, so erhält man die Gesamtpunktzahl. Betrachtet werden die Ereignisse

A: „die Gesamtpunktzahl ist 12“
B: „die Summe der Punkte aus den ersten drei Würfen ist durch 3 teilbar“
C: „beim ersten Münzwurf werden 4 Punkte erzielt“
D: „beim zweiten Münzwurf werden 6 Punkte erzielt“

Untersuchen Sie die Ereignisse A, B, C und A, B, D jeweils auf stochastische Unabhängigkeit. $\boxed{10}$

Aufgabe 5: Bei einem Glücksspiel gewinnt man in der Hälfte aller Fälle exakt 1 Euro, mit einer Wahrscheinlichkeit von 30 Prozent exakt 5 Euro und mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 Prozent exakt 10 Euro. In allen übrigen Fällen gewinnt man nichts. Die Zufallsgröße X gebe den bei dem Spiel erreichten Gewinn an.

a) Berechnen Sie $E(X)$ und $Var(X)$. $\boxed{3}$

b) Eine Person spielt das Glücksspiel 100 mal hintereinander. Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ein möglichst kleines Intervall I an, in dem ihr in diesen 100 Spielen insgesamt erreichter Gewinn mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96 Prozent liegt. $\boxed{7}$

Aufgabe 6: Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, beim 12-fachen Wurf mit einem idealen Spielwürfel jede der Augenzahlen 1, 2 und 3 mindestens einmal zu erzielen. $\boxed{10}$

Hinweis: Verwenden Sie die Inklusions-Exklusions-Formel!

Aufgabe 7: Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ den folgenden Bruch

$$w_n = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \ \ldots \ \cdot \frac{2n \cdot 2n}{(2n-1)(2n+1)}$$

a) Zeigen Sie, dass sich diese Darstellung vereinfachen lässt zu $w_n = \dfrac{2^{4n}}{2n+1} \cdot \dfrac{(n!)^4}{[(2n)!]^2}$. $\boxed{4}$

Hinweis: Das geht z.B. mit vollständiger Induktion!

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Stirling-Formel einen Näherungswert für die Zahl w_n. $\boxed{4}$

c) Was lässt sich damit über w_n für $n \longrightarrow \infty$ aussagen? $\boxed{2}$

Aufgabe 8: Ein Hotel hat 600 Betten. Maximal wie viele Reservierungen darf der Hotelmanager für den kommenden Sonntag annehmen, wenn eine Reservierung erfahrungsgemäß mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 Prozent storniert wird und eine Überbuchung des Hotels mit einer Wahrscheinlichkeit von 97,5 Prozent ausgeschlossen werden soll? $\boxed{10}$

Das Stochastik-Team wünscht viel Erfolg!

Name:
Matr.-Nr.:

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

$$\text{Für jede} \begin{cases} \text{richtig} \\ \text{falsch} \\ \text{nicht} \end{cases} \text{beantwortete Frage gibt es} \begin{cases} 2 \\ -1 \\ 0 \end{cases} \text{Punkte,}$$

solange dadurch die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe nicht negativ wird.
Wichtig: Beachten Sie bitte, dass falsche Antworten zu Punktabzug führen!

Falls im folgenden nicht näher spezifiziert bezeichne (Ω, p) immer ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^* und Wahrscheinlichkeitsverteilung P, wobei A, B, C Ereignisse und X, Y Zufallsgrößen über Ω seien.

		WAHR	FALSCH
1.	Gilt $P^X = P^Y$, so folgt $X = Y$.	☐	☐
2.	Ω^* ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.	☐	☐
3.	Beim Wurf mit zwei idealen Würfeln braucht man im Durchschnitt sechs Würfe bis zur ersten Augensumme 7.	☐	☐
4.	Existiert $E(X^2 \cdot Y^2)$, so existieren auch $Var(X)$ und $Var(Y)$.	☐	☐
5.	Gilt $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ und ist (Ω, p) ein Laplace-Experiment, so folgt $A \cap B = \emptyset$.	☐	☐
6.	Gilt $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$, so sind X und Y unkorreliert.	☐	☐
7.	Die Gleichung $x + y + z = 99$ besitzt weniger als 5000 verschiedene Lösungstupel (x, y, z) ganzer Zahlen $x, y, z \in \mathbb{N}_0$.	☐	☐
8.	Beschreibt (Ω, p) den dreifachen unabhängigen Wurf eines idealen Würfels, so existieren stochastisch unabhängige Ereignisse A, B, C mit $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ und $P(C) = \frac{1}{6}$.	☐	☐
9.	Von zwei Urnen enthält die eine zwei rote Kugeln und die andere je eine rote und eine schwarze Kugel. Es wird nun zufällig aus einer der beiden Urnen eine Kugel gezogen. **Behauptung:** Ist diese Kugel rot, so ist die andere Kugel in der Urne mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ebenfalls rot.	☐	☐
10.	Gilt $P(A\|B) = P(A\|\bar{B})$, so sind A und B stochastisch unabhängig.	☐	☐

Für r richtige und f falsche gegebene Antworten erhalten Sie $\max\{0, 2r - f\}$ Punkte.
Nicht beantwortete Fragen werden dabei nicht gewertet. 20

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ