Lösungen zur Probeklausur

(A) 1) a) Das LE ist geg. durch (Ω, p) mit

(B) Ersetze 120 durch 140!

$\Omega := \{K, Z\}^{120}$ und $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{2^{120}}$ $(\omega \in \Omega)$,

wobei für $(\omega_1, \dots, \omega_{120}) \in \Omega$ der Eintrag ω_i das Resultat des i-ten Wurfes (K = Kopf, Z = Zahl) angibt.

$$A_k := \{ (\omega_1, \dots, \omega_{120}) \in \Omega \mid \ |\{ i \mid \omega_i = K \}| \geq k \}$$

b) Die Situation ist auch beschreibbar als Bernoulli-Kette (Ω', p') mit

$\Omega' := \{0, 1, \dots, 120\}$ und $p'(\omega) = B_{120, \frac{1}{2}}(\omega)$, $\omega \in \Omega'$.

Bei dieser Modellierung ist

$A_k := \{k, k+1, \dots, 120\}$ und

$$P'(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} p'(\omega) = \sum_{\omega \in A_k} B_{120, \frac{1}{2}}(\omega)$$

$$= \sum_{i=k}^{120} \binom{120}{i} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{120-i} = \left(\frac{1}{2}\right)^{120} \sum_{i=k}^{120} \binom{120}{i}.$$

2) a) Das LE ist geg. durch (Ω, p) mit

$$\Omega := \{ (\omega_1, \dots, \omega_{12}) \in \{T, P, F\}^{12} \mid \ |\{i \mid \omega_i = T\}| = |\{i \mid \omega_i = P\}| = |\{i \mid \omega_i = K\}| = 4 \}$$

wobei für $(\omega_1, \dots, \omega_{12}) \in \Omega$ der Eintrag ω_i angibt, was an Position i von der Spitze auf den Spieß aufgespießt wurde. (T = Tomate, P = Paprika, F = Feta)

$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ $(\omega \in \Omega)$ wie für LE üblich.

b) $A := \{ (\omega_1, \dots, \omega_{12}) \in \Omega \mid \exists j \in \{1, \dots, 9\} : \ \{ i \mid \omega_i = T \} = \{ j, j+1, j+2, j+3 \} \}$

c) $$|\Omega| = \underbrace{\binom{12}{4}}_{\substack{\text{Anzahl der Möglichkeiten,} \\ \text{4 Tomaten auf 12} \\ \text{Positionen zu verteilen!}}} \cdot \underbrace{\binom{8}{4}}_{\substack{\text{Anzahl der Möglichkeiten,} \\ \text{4 der 8 verbliebenen} \\ \text{Positionen für Paprikas} \\ \text{zu reservieren!}}} = \frac{12!}{4!\,4!\,4!} = 34650$$

$$|A| = \underbrace{9}_{\substack{\text{Wahl von } j \in \{1,\dots,9\} \text{ mit} \\ \{i \mid \omega_i = T\} = \{j, j+1, j+2, j+3\}}} \cdot \underbrace{\binom{8}{4}}_{\substack{\text{Anzahl der Möglichkeiten,} \\ \text{4 der 8 verbliebenen} \\ \text{Positionen für Paprikas} \\ \text{zu reservieren!}}} = \frac{9!}{4!\,4!} = 630$$

$$P(A) = \frac{630}{34650} = \frac{1}{55} \approx 1{,}818\,\%$$

3) Mit der Stirling-Formel erhält man

$$\binom{4n}{n} = \frac{(4n)!}{n!\cdot(3n)!} = \frac{\sqrt{2\pi\cdot 4n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^{n}\cdot\sqrt{2\pi\cdot 3n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n}}$$

$$= \frac{\sqrt{4}\cdot 4^{4n}}{\sqrt{2\pi n}\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{3n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\pi n}}\cdot\left(\frac{256}{27}\right)^{n}$$

B Für $n = 1600$ erhält man

$$\log_{10}\binom{6400}{1600} = \log_{10}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4800\pi}} + 1600\log_{10}\frac{256}{27}$$

$$\approx 1561{,}063241$$

$$\Rightarrow \binom{6400}{1600} \approx 10^{1561{,}063241} \approx 1{,}157\cdot 10^{1561}$$

Ergebnis: 1562 Stellen mit führenden Ziffern 115.

A Für $n = 1800$ analog

$$\log_{10}\binom{7200}{1800} = \log_{10}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5400\pi}} + 1800\log_{10}\frac{256}{27}$$

$$\approx 1756{,}412905$$

$$\Rightarrow \binom{7200}{1800} \approx 2{,}588\cdot 10^{1756}$$

Ergebnis: 1757 Stellen mit führenden Ziffern 258.

(A) 4) Wir modellieren die Situation als LE (Ω, p) mit
$\Omega = \{1, 2, \dots, 799\,999\}$ und $p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$ $(\omega \in \Omega)$.
Für $m \in \mathbb{N}$ ist das Ereignis „eine Zahl ist durch m teilbar" gegeben durch

$$A_m = \{\omega \in \Omega \mid m \mid \omega\} \quad \text{mit} \quad |A_m| = \left\lfloor \frac{799\,999}{m} \right\rfloor$$

$$\text{und} \quad P(A_m) = \frac{|A_m|}{|\Omega|}.$$

Weiter sei das Ereignis „eine Zahl ist 1001-frei" gegeben durch

$$E = \{\omega \in \Omega \mid 7 \nmid \omega \wedge 11 \nmid \omega \wedge 13 \nmid \omega\} \quad \text{mit} \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}.$$

Es gilt dann

$$\overline{E} = \{\omega \in \Omega \mid 7 \mid \omega \vee 11 \mid \omega \vee 13 \mid \omega\} = A_7 \cup A_{11} \cup A_{13}$$

und man erhält mit Inklusion-Exklusion

$$\frac{|E|}{|\Omega|} = P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - P(A_7 \cup A_{11} \cup A_{13})$$

$$= 1 - P(A_7) - P(A_{11}) - P(A_{13}) + P(A_7 \cap A_{11}) + P(A_7 \cap A_{13}) + P(A_{11} \cap A_{13}) - P(A_7 \cap A_{11} \cap A_{13})$$

$$= 1 - P(A_7) - P(A_{11}) - P(A_{13}) + P(A_{77}) + P(A_{91}) + P(A_{143}) - P(A_{1001})$$

$$\Rightarrow |E| = |\Omega| - |A_7| - |A_{11}| - |A_{13}| + |A_{77}| + |A_{91}| + |A_{143}| - |A_{1001}|$$

$$= 799\,999 - \left\lfloor \frac{799\,999}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{799\,999}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{799\,999}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{799\,999}{77} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{799\,999}{91} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{799\,999}{143} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{799\,999}{1001} \right\rfloor$$

$$= 799\,999 - 114285 - 72727 - 61538 + 10389 + 8791 + 5594 - 799$$

$$= 575\,424$$ Anzahl 1001-freier Zahlen < 800000.

(B) Analog erhält man

$$|E| = 899999 - \left\lfloor \frac{899\,999}{7} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{899\,999}{11} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{899\,999}{13} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{899\,999}{77} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{899\,999}{91} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{899\,999}{143} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{899\,999}{1001} \right\rfloor$$

$$= 899\,999 - 128571 - 81818 - 69230 + 11688 + 9890 + 6293 - 899$$

$$= 647\,352$$ Anzahl 1001-freier Zahlen < 900000.

5) Setze $A := \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$

und $B := \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7\cdot 13}{6} = \frac{91}{6}$

Der zweifache Würfelwurf läßt sich als LE (Ω, p) mit

$\Omega = \{1,\dots,6\}^2$ und $p(\omega) = \frac{1}{36}$ $(\omega\in\Omega)$ modellieren.

Die ZGn sind dann für $\omega = (i,j)\in\Omega$ gegeben durch

$X(\omega) = i+j$ und $Y(\omega) = i\cdot j$.

a) $$E(X) = \frac{1}{36}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\underbrace{\sum_{j=1}^{6} i}_{6i} + \frac{1}{36}\sum_{j=1}^{6}\underbrace{\sum_{i=1}^{6} j}_{6j}$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j = 2A = 7$$

b) $$E(X^2) = \frac{1}{36}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)^2 = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)^2$$

$$= \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i^2 + 2\cdot\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} i\cdot\frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j + \frac{1}{6}\sum_{j=1}^{6} j^2$$

$$= B + 2A^2 + B = 2A^2 + 2B$$

$$\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2A^2 + 2B - 4A^2 = 2B - 2A^2 = \frac{35}{6} \approx 5{,}833$$

$$E(Y^2) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} i^2 j^2 = B^2 = \frac{8281}{36}$$

$$E(Y) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6} ij = A^2 = \frac{49}{4}$$

$$\mathrm{Var}(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2 = B^2 - A^4 = \frac{11515}{144} \approx 79{,}97$$

c) $$E(XY) = \frac{1}{36}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}(i+j)\,ij = 2AB = \frac{637}{6}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 2AB - 2A^3 = \frac{245}{12} > 0$$

Die ZGn X und Y sind somit positiv korreliert.

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X)\,\mathrm{Var}(Y)}} = \frac{\frac{245}{12}}{\sqrt{\frac{35}{6}\cdot\frac{11515}{144}}} = \frac{245}{\sqrt{\frac{35}{6}\cdot 11515}} = \frac{7}{\sqrt{\frac{329}{6}}}$$

$$= 7\sqrt{\frac{6}{329}} \approx 0{,}9453.$$

6) ① WAHR!

$$\begin{aligned}Cov(X+\lambda, Y+\lambda) &= E((X+\lambda)(Y+\lambda)) - E(X+\lambda)\cdot E(Y+\lambda)\\ &= E(XY+\lambda X+\lambda Y+\lambda^2) - (E(X)+\lambda)(E(Y)+\lambda)\\ &= E(XY)+\lambda E(X)+\lambda E(Y)+\lambda^2 - E(X)E(Y) - \lambda E(X) - \lambda E(Y) - \lambda^2\\ &= E(XY)-E(X)E(Y) = Cov(X,Y). \square\end{aligned}$$

② FALSCH!

Ω^* ist endlich oder abzählbar-unendlich, siehe Def. 3.19.

③ FALSCH!

Mit 2.11 sind es $KmW(10,20) = \binom{10+20-1}{20} = 10015005$ Möglichkeiten.

④ FALSCH!

Aus $E(|X|)=0$ folgt $X=0$ lediglich P-fast sicher, vgl. mit Lemma 4.31(d).

⑤ WAHR!

Mit $-|X| \leq X \leq |X|$ folgt $\underbrace{E(-|X|)}_{-E(|X|)} \leq E(X) \leq E(|X|)$ und $|E(X)| \leq E(|X|)$,

siehe Satz 4.20(c). $\square$

⑥ WAHR!

Es liegt die hypergeom. Verteilung $H_{900,41,11}$ mit Erwartungswert $11\cdot\frac{41}{900} = \frac{451}{900} > 0{,}5$ vor!

⑦ FALSCH!

Siehe 2. Übung, Aufgabe 3a).

⑧ WAHR!

$$\begin{aligned}P(A\cup B) &= P((A\setminus B)\,\dot\cup\,(A\cap B)\,\dot\cup\,(B\setminus A))\\ &= P(A\setminus B)+P(A\cap B)+P(B\setminus A) \geq P(A\setminus B)+P(B\setminus A). \square\end{aligned}$$

⑨ WAHR!

Mit $E(X^3)$ existiert auch $E(|X|^3)$. Mit $X^2 \leq 1+|X|^3$ existiert auch $E(X^2)$ und $Var(X)$, siehe 4.21. $\square$

⑩ FALSCH!

Sei X die ZG aus 4.10(6) und $Y=-X$.

Dann existiert $E(X+Y) = E(0) = 0$, $E(X)$ existiert jedoch nicht.