Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Dr. Daniel Herden

Essen, den 22.12.2011

Probeklausur zur Stochastik für Lehramt

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 40 der 80 möglichen Punkte erreicht werden.
Runden Sie Näherungswerte bitte jeweils auf vier signifikante Dezimalstellen: $\pi \approx 3,142$.

Aufgabe 1: Eine ideale Münze werde 120-mal geworfen, wobei A_k für $k \in \{0, 1, \ldots, 120\}$ das Ereignis bezeichnet, dass dabei mindestens k-mal „Kopf" geworfen wird.

a) Stellen Sie diese Situation als Laplace-Experiment (Ω, p) dar und geben Sie das Ereignis A_k in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω an.

b) Stellen Sie diese Situation durch ein geeignetes endliches Zufallsexperiment (Ω', p') mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P' dar, so dass die Elemente von Ω' die erzielte Anzahl „Kopf"-Würfe angeben. Formulieren Sie das Ereignis A_k mit Bezug auf dieses Experiment und geben Sie eine Formel für $P'(A_k)$ an.

$\boxed{10}$

Aufgabe 2: Auf einem vegetarischen Grillspieß wurden in rein zufälliger Reihenfolge vier Kirschtomaten, vier Stück Paprika und vier Stück Feta-Käse aufgespießt. Es sei A das Ereignis „Die vier Kirschtomaten folgen direkt aufeinander".

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Stellen Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

$\boxed{12}$

Aufgabe 3: Geben Sie mit Hilfe der Stirling-Formel eine Näherungsformel für den Binomialkoeffizienten $\binom{4n}{n}$ an. Bestimmen Sie anschließend die Anzahl der Stellen und die drei führenden Ziffern von $\binom{7200}{1800}$.

$\boxed{12}$

Aufgabe 4: Eine positive ganze Zahl heißt „1001-frei", falls sie nicht durch $7, 11$ oder 13 teilbar ist. Wie viele 1001-freie Zahlen < 800000 gibt es?

Hinweis: Verwenden Sie die Inklusions-Exklusions-Formel mit Bezug auf ein geeignet gewähltes diskretes Zufallsexperiment (Ω, p).

$\boxed{12}$

Aufgabe 5: Ein idealer Spielwürfel werde zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gebe dabei die Summe der beiden erzielten Zahlen an und die Zufallsgröße Y ihr Produkt.

a) Berechnen Sie $E(X)$.

b) Berechnen Sie $Var(X)$ und $Var(Y)$.

c) Untersuchen Sie X und Y auf Korrelation und berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$.

$\boxed{14}$

Name:
Matr.-Nr.:

Aufgabe 6: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Falls im folgenden nicht näher spezifiziert bezeichne (Ω, p) immer ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^* und Wahrscheinlichkeitsverteilung P, wobei A, B Ereignisse und X, Y Zufallsgrößen über Ω seien.

		WAHR	FALSCH
1.	Es gilt $Cov(X + \lambda, Y + \lambda) = Cov(X, Y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.	☐	☐
2.	Ω^* ist eine abzählbar-unendliche Menge.	☐	☐
3.	Es gibt weniger als 10000000 Möglichkeiten einen Blumenstrauß aus 20 Blumen zusammenzustellen, wenn es 10 verschiedene Blumensorten gibt und nur interessiert, wie viele Blumen von jeder Sorte verwendet werden.	☐	☐
4.	Gilt $E(\|X\|) = 0$, so folgt $X = 0$.	☐	☐
5.	Es gilt $E(\|X\|) \geq \|E(X)\|$.	☐	☐
6.	Enthält eine Lieferung von 900 Fernsehern 41 defekte Geräte, so enthält eine zufällig gewählte Stichprobe von 11 Fernsehern im Mittel $> 0,5$ defekte Geräte.	☐	☐
7.	Gilt $P(A) \leq P(B)$, so folgt $A \subseteq B$.	☐	☐
8.	Es gilt $P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \leq P(A \cup B)$.	☐	☐
9.	Existiert $E(X^3)$, so existiert auch $Var(X)$.	☐	☐
10.	Existiert $E(X + Y)$, so existieren auch $E(X)$ und $E(Y)$ und es gilt $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.	☐	☐

Für r richtige und f falsche gegebene Antworten erhalten Sie $2 \cdot \max\{0, r - f\}$ Punkte. Nicht beantwortete Fragen werden dabei nicht gewertet.

$\boxed{20}$

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Dr. Daniel Herden

Essen, den 22.12.2011

Probeklausur zur Stochastik für Lehramt

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Die Klausur gilt als bestanden, wenn 40 der 80 möglichen Punkte erreicht werden.
Runden Sie Näherungswerte bitte jeweils auf vier signifikante Dezimalstellen: $\pi \approx 3,142$.

Aufgabe 1: Eine ideale Münze werde 140-mal geworfen, wobei A_k für $k \in \{0, 1, \dots, 140\}$ das Ereignis bezeichnet, dass dabei mindestens k-mal „Kopf" geworfen wird.

a) Stellen Sie diese Situation als Laplace-Experiment (Ω, p) dar und geben Sie das Ereignis A_k in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω an.

b) Stellen Sie diese Situation durch ein geeignetes endliches Zufallsexperiment (Ω', p') mit Wahrscheinlichkeitsverteilung P' dar, so dass die Elemente von Ω' die erzielte Anzahl „Kopf"-Würfe angeben. Formulieren Sie das Ereignis A_k mit Bezug auf dieses Experiment und geben Sie eine Formel für $P'(A_k)$ an.

$\boxed{10}$

Aufgabe 2: Auf einem vegetarischen Grillspieß wurden in rein zufälliger Reihenfolge vier Kirschtomaten, vier Stück Paprika und vier Stück Feta-Käse aufgespießt. Es sei A das Ereignis „Die vier Kirschtomaten folgen direkt aufeinander".

a) Modellieren Sie die Situation durch ein geeignetes Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Stellen Sie das Ereignis A in Mengenschreibweise als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(A)$.

$\boxed{12}$

Aufgabe 3: Geben Sie mit Hilfe der Stirling-Formel eine Näherungsformel für den Binomialkoeffizienten $\binom{4n}{n}$ an. Bestimmen Sie anschließend die Anzahl der Stellen und die drei führenden Ziffern von $\binom{6400}{1600}$.

$\boxed{12}$

Aufgabe 4: Eine positive ganze Zahl heißt „1001-frei", falls sie nicht durch $7, 11$ oder 13 teilbar ist. Wie viele 1001-freie Zahlen < 900000 gibt es?

Hinweis: Verwenden Sie die Inklusions-Exklusions-Formel mit Bezug auf ein geeignet gewähltes diskretes Zufallsexperiment (Ω, p).

$\boxed{12}$

Aufgabe 5: Ein idealer Spielwürfel werde zweimal geworfen. Die Zufallsgröße X gebe dabei die Summe der beiden erzielten Zahlen an und die Zufallsgröße Y ihr Produkt.

a) Berechnen Sie $E(X)$.

b) Berechnen Sie $Var(X)$ und $Var(Y)$.

c) Untersuchen Sie X und Y auf Korrelation und berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten $\rho(X, Y)$.

14

Name:
Matr.-Nr.:

Aufgabe 6: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Falls im folgenden nicht näher spezifiziert bezeichne (Ω, p) immer ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^* und Wahrscheinlichkeitsverteilung P, wobei A, B Ereignisse und X, Y Zufallsgrößen über Ω seien.

		WAHR	FALSCH
1.	Es gilt $Cov(X + \lambda, Y + \lambda) = Cov(X, Y)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.	☐	☐
2.	Ω^* ist eine abzählbar-unendliche Menge.	☐	☐
3.	Es gibt weniger als 10000000 Möglichkeiten einen Blumenstrauß aus 20 Blumen zusammenzustellen, wenn es 10 verschiedene Blumensorten gibt und nur interessiert, wie viele Blumen von jeder Sorte verwendet werden.	☐	☐
4.	Gilt $E(\vert X\vert) = 0$, so folgt $X = 0$.	☐	☐
5.	Es gilt $E(\vert X\vert) \geq \vert E(X)\vert$.	☐	☐
6.	Enthält eine Lieferung von 900 Fernsehern 41 defekte Geräte, so enthält eine zufällig gewählte Stichprobe von 11 Fernsehern im Mittel $> 0,5$ defekte Geräte.	☐	☐
7.	Gilt $P(A) \leq P(B)$, so folgt $A \subseteq B$.	☐	☐
8.	Es gilt $P(A \setminus B) + P(B \setminus A) \leq P(A \cup B)$.	☐	☐
9.	Existiert $E(X^3)$, so existiert auch $Var(X)$.	☐	☐
10.	Existiert $E(X + Y)$, so existieren auch $E(X)$ und $E(Y)$ und es gilt $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.	☐	☐

Für r richtige und f falsche gegebene Antworten erhalten Sie $2 \cdot \max\{0, r - f\}$ Punkte. Nicht beantwortete Fragen werden dabei nicht gewertet.

20

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ