

## Hauptklausur zur Stochastik für Lehramt

Bearbeitungszeit: mind. 120 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel: unbeschriebenes Papier, Schreibutensilien und Taschenrechner

Runden Sie Näherungswerte bitte jeweils auf vier signifikante Dezimalstellen:  $\pi \approx 3,142$ .

**Aufgabe 1:** In einer Urne befinden sich acht Kugeln, beschriftet mit den Zahlen von 1 bis 8. Bei einer Gewinnlotterie wird eine vierstellige Gewinnzahl bestimmt, indem man durch Ziehung ohne Zurücklegen aus dieser Urne zunächst die erste, dann die zweite, danach die dritte und schließlich die vierte Ziffer dieser Zahl ermittelt.

- a) Es sei  $n \in \mathbb{N}$  eine feste natürliche Zahl. Geben Sie ein Laplace-Experiment  $(\Omega, p)$  an, das die im Verlauf von  $n$  Wochen gezogenen Gewinnzahlen beschreibt. Formulieren Sie für  $i \in \{1, \dots, n\}$  das Ereignis

$$E_i := \text{„In der } i\text{-ten Woche wird die Gewinnzahl 1234 gezogen.“}$$

in Mengenschreibweise mit Bezug auf dieses Laplace-Experiment  $(\Omega, p)$ .

- b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P(E_i)$ .
- c) Wie viele Wochen wird man im Durchschnitt warten müssen, bis zum ersten Mal die Zahl 1234 gezogen wird.

4+3+3

**Aufgabe 2:** In einem Labor werden die 4 Altersgruppen

$$G_1 := \text{„Alter } < 20\text{“}$$

$$G_2 := \text{„}20 \leq \text{Alter } < 40\text{“}$$

$$G_3 := \text{„}40 \leq \text{Alter } < 60\text{“}$$

$$G_4 := \text{„}60 \leq \text{Alter“}$$

auf das Vorhandensein der genetischen Merkmale  $M_1$  und  $M_2$  untersucht. Dabei treten die beiden Merkmale mit den folgenden Häufigkeiten auf:

	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$
nur $M_1$	30%	25%	35%	15%
nur $M_2$	40%	50%	25%	40%
$M_1$ und $M_2$	5%	15%	20%	30%

Es sei außerdem bekannt, dass Gruppe 4 genauso groß ist wie Gruppe 3, Gruppe 1 dreimal so groß ist wie Gruppe 4 und Gruppe 2 doppelt so groß ist wie Gruppe 3.

- a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person das Merkmal  $M_1$  besitzt.
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person keines der beiden Merkmale besitzt.
- c) Eine Person hat nur Merkmal  $M_2$ . Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person aus der Gruppe  $G_1$  stammt.

3+3+4

**Aufgabe 3:** Es werde aus 3 Urnen hintereinander gezogen. In den ersten zwei Urnen befinden sich je sechs Kugeln, beschriftet mit den Zahlen von 1 bis 6, und in der letzten Urne zwei Kugeln, beschriftet mit 0 und 1. Außerdem seien die Ereignisse  $A, B, C$  definiert durch:

$A :=$  „Die Summe der drei gezogenen Zahlen ist gerade.“

$B :=$  „Die Summe der aus den ersten beiden Urnen gezogenen Zahlen ist mindestens 10.“

$C :=$  „Die Kugel aus der letzten Urne zeigt eine 1.“

- a) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse  $A, B, C$  paarweise stochastisch unabhängig sind.
- b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse  $A, B, C$  stochastisch unabhängig sind.

6+4

**Aufgabe 4:** Ein gewöhnlicher sechsseitiger Spielwürfel werde 6000-mal geworfen. Es bezeichne  $A$  dabei im Folgenden das Ereignis

„Es werden mindestens 951 und maximal 1049 Vieren gewürfelt.“

- a) Geben Sie einen möglichst einfachen Term für die exakte Wahrscheinlichkeit  $P(A)$  an.
- b) Schätzen Sie  $P(A)$  mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ab.
- c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ein möglichst kleines  $k \in \mathbb{R}$ , so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens  $1000 - k$  und maximal  $1000 + k$  Vieren gewürfelt werden, bei mindestens 90% liegt.

3+3+4

**Aufgabe 5:**

- a) Berechnen Sie mit Stirling eine Näherungsformel für den Ausdruck  $\binom{8n}{2n}$ .
- b) Berechnen Sie die Anzahl der Stellen sowie die ersten vier Ziffern von  $\binom{4800}{3600}$ .  
**Hinweis:** Für  $x > 0$  gilt  $x = 10^{\log_{10} x}$ .

5+5

**Aufgabe 6:** Von den 1000 Studenten einer Universität sei bekannt, dass 446 Mathematik, 190 Physik, 312 Chemie und 243 Biologie studieren. Außerdem sei bekannt:

- 80% der Physikstudenten studieren auch Mathematik.
- 10% der Physikstudenten studieren auch Chemie.
- 10% der Physikstudenten studieren auch Biologie.
- 50% der Chemiestudenten studieren auch Mathematik.
- 25% der Chemiestudenten studieren auch Biologie.
- $33,\bar{3}\%$  der Biologiestudenten studieren auch Mathematik.
- Jede Fächerkombination dreier dieser vier Fächer wird jeweils von 5 Studenten studiert.
- Keiner studiert alle vier Fächer.

Wie viele Studenten studieren unter diesen Voraussetzungen keines dieser vier Fächer?

**Hinweis:** Verwenden Sie die Inklusions-Exklusions-Formel (Siebformel von Sylvester-Poincaré).

10

**Aufgabe 7:** Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Regentropfen, die pro Minute auf ein  $1 \text{ cm}^2$  großes Flächenstück fallen, sei in guter Näherung durch eine Poisson-Verteilung beschrieben. Nun betrachte man zwei verschiedene Städte: Eine Stadt, in der es leicht nieselt mit durchschnittlich 0,1 Regentropfen pro Quadratzentimeter und Minute, und eine andere Stadt, auf die ein leichter Regen mit durchschnittlich 0,9 Regentropfen pro Quadratzentimeter und Minute niederfällt.

- a) Berechnen Sie für beide Städte die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute mindestens 2 Regentropfen auf ein vorgegebenes Flächenstück der Größe  $1 \text{ cm}^2$  fallen.
- b) Nun werde in beiden Städten gleichzeitig gemessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute 2 Regentropfen auf die  $2 \text{ cm}^2$  große Fläche fallen.

5+5

**Aufgabe 8:** Ein Kartenstapel aus 20 Karten, beschriftet mit den Zahlen von 1 bis 20, werde in zwei Stapel aufgeteilt. Im ersten Stapel befinden sich die Zahlen von 1 bis 10, im zweiten die Zahlen von 11 bis 20. Nun werde aus jedem Stapel eine Karte gezogen. Außerdem seien die Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  definiert durch:

$X :=$  „Summe der gezogenen Zahlen.“

$Y :=$  „Betrag der Differenz zwischen 20 und der aus dem zweiten Stapel gezogenen Zahl.“

- a) Geben Sie ein für diese Situation geeignetes Zufallsexperiment  $(\Omega, p)$  an und definieren Sie  $X$  und  $Y$  mit Bezug auf dieses Zufallsexperiment.
- b) Geben Sie die induzierten Zähldichten  $p^X$  und  $p^Y$  explizit an.
- c) Berechnen Sie  $E(X)$  und  $E(Y)$ , sowie  $Var(X)$  und  $Var(Y)$ .
- d) Berechnen Sie  $Cov(X, Y)$  und  $\rho(X, Y)$ .

2+2+4+2

**Aufgabe 9:** Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Falls im Folgenden nicht näher spezifiziert bezeichne  $(\Omega, p)$  immer ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger  $\Omega^*$  und Wahrscheinlichkeitsverteilung  $P$ , wobei  $A, B, C$  Ereignisse und  $X, Y$  Zufallsgrößen über  $\Omega$  seien.

		WAHR	FALSCH
1.	Ist $\Omega^*$ endlich, so existiert $Var(X)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2.	Gilt $P^X = P^Y$ , so folgt $X = Y$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3.	Existieren $E(X)$ und $Var(X)$ , so gilt für alle $\epsilon > 0$ : $P( X - E(X)  > \epsilon) < \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4.	Sind die Zufallsgrößen $X$ und $Y$ unkorreliert, so sind sie auch stochastisch unabhängig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5.	Auf einem See schwimmen Enten: 37 Weibchen und 52 Männchen. Werden von Jägern zufällig 12 dieser Tiere geschossen, so befinden sich darunter im Durchschnitt 5 oder mehr Männchen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6.	Falls $Var(X) = Var(Y) = 1$ , dann gilt $Cov(X, Y) \leq 1$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7.	Es gilt $P(A) - P(B) = P(A \setminus B) - P(B \setminus A)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8.	Es gibt 1260 unterscheidbare Möglichkeiten, 9 Personen so in drei Gruppen aufzuteilen, dass je eine Gruppen aus 2, 3 bzw. 4 Personen besteht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9.	Sind $A, B, C$ stochastisch unabhängig, so sind auch $A \cup B$ und $C$ stochastisch unabhängig.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10.	Existieren $E(X)$ und $Var(X)$ , so existiert auch $E(X^2)$ .	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Für  $r$  richtige und  $f$  falsche gegebene Antworten erhalten Sie  $2 \cdot \max\{0, r - f\}$  Punkte. Nicht beantwortete Fragen werden dabei nicht gewertet.

20

Name: \_\_\_\_\_ Vorname: \_\_\_\_\_

Matr.-Nr.: \_\_\_\_\_ Fachsemester: \_\_\_\_\_

A 1	A 2	A 3	A 4	A 5	A 6	A 7	A 8	A 9	$\Sigma$
10	10	10	10	10	10	10	10	20	100

Viel Erfolg!!