Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Dr. Daniel Herden
Dipl.-Inf. Christian Thiel
Matthias aus der Wiesche

Essen, den 20.02.2013

Hauptklausur zur Stochastik für Lehramt

Bearbeitungszeit: mind. 120 Minuten

Zugelassene Hilfsmittel: unbeschriebenes Papier, Schreibutensilien und Taschenrechner

Runden Sie Näherungswerte bitte jeweils auf vier signifikante Dezimalstellen: $\pi \approx 3{,}142$.

Aufgabe 1: In einer Urne befinden sich acht Kugeln, beschriftet mit den Zahlen von 1 bis 8. Bei einer Gewinnlotterie wird eine vierstellige Gewinnzahl bestimmt, indem man durch Ziehung ohne Zurücklegen aus dieser Urne zunächst die erste, dann die zweite, danach die dritte und schließlich die vierte Ziffer dieser Zahl ermittelt.

a) Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine feste natürliche Zahl. Geben Sie ein Laplace-Experiment (Ω, p) an, das die im Verlauf von n Wochen gezogenen Gewinnzahlen beschreibt. Formulieren Sie für $i \in \{1, \dots, n\}$ das Ereignis

$$E_i := \text{„In der } i\text{-ten Woche wird die Gewinnzahl 1234 gezogen.“}$$

in Mengenschreibweise mit Bezug auf dieses Laplace-Experiment (Ω, p).

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(E_i)$.

c) Wie viele Wochen wird man im Durchschnitt warten müssen, bis zum ersten Mal die Zahl 1234 gezogen wird.

$\boxed{4+3+3}$

Lösung:

a) Zuerst betrachten wir das Laplace-Experiment (Ω', p'), das eine einzelne Ziehung beschreibt. Es ergibt sich:

$$\Omega' := \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_j \in \{1, \dots, 8\} \forall j \in \{1, \dots, 4\}, \omega_j \neq \omega_k \forall j \neq k\}$$

Nun ist unser (Ω, p) eine n-malige Durchführung von (Ω', p'), daher gilt:

$$\Omega := \Omega'^n = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid \omega_j \in \{1, \dots, 8\} \forall j \in \{1, \dots, 4\}, \omega_j \neq \omega_k \forall j \neq k\}^n$$

Daraus folgt:

$$p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5)^n} = \frac{1}{1680^n} \, \forall \, \omega \in \Omega$$

Für E_i ergibt sich:

$$E_i := \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Omega \mid \lambda_i = (1, 2, 3, 4)\}$$

b) Da $|E_i| = 1 \cdot 1680^{n-1}$, gilt für $P(E_i)$:

$$P(E_i) = \frac{|E_i|}{|\Omega|} = \frac{1680^{n-1}}{1680^n} = \frac{1}{1680}$$

c) Die zu erwartende durchschnittliche Anzahl an Ziehungen kann durch den Erwartungswert der negativen Binomialverteilung berechnet werden. Hierbei ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses $p_0 = \frac{1}{1680}$ und für den Erwartungswert gilt $E(X) = \frac{1}{p_0} = 1680$. Es dauert also im Durchschnitt 1680 Ziehungen bis zur ersten Ziehung der Zahl 1234.

Aufgabe 2: In einem Labor werden die 4 Altersgruppen

$$\begin{aligned} G_1 &:= \text{„Alter} < 20\text{“} \\ G_2 &:= \text{„}20 \leq \text{Alter} < 40\text{“} \\ G_3 &:= \text{„}40 \leq \text{Alter} < 60\text{“} \\ G_4 &:= \text{„}60 \leq \text{Alter“} \end{aligned}$$

auf das Vorhandensein der genetischen Merkmale M_1 und M_2 untersucht. Dabei treten die beiden Merkmale mit den folgenden Häufigkeiten auf:

	G_1	G_2	G_3	G_4
nur M_1	30%	25%	35%	15%
nur M_2	40%	50%	25%	40%
M_1 und M_2	5%	15%	20%	30%

Es sei außerdem bekannt, dass Gruppe 4 genauso groß ist wie Gruppe 3, Gruppe 1 dreimal so groß ist wie Gruppe 4 und Gruppe 2 doppelt so groß ist wie Gruppe 3.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person das Merkmal M_1 besitzt.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person keines der beiden Merkmale besitzt.

c) Eine Person hat nur Merkmal M_2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person aus der Gruppe G_1 stammt.

$\boxed{3+3+4}$

Lösung:

Es gilt:

$$1 = P(G_1) + P(G_2) + P(G_3) + P(G_4) = 3 \cdot P(G_4) + 2 \cdot P(G_4) + P(G_4) + P(G_4) = 7 \cdot P(G_4)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P(G_1) &= \frac{3}{7} \\ P(G_2) &= \frac{2}{7} \\ P(G_3) &= \frac{1}{7} \\ P(G_4) &= \frac{1}{7} \end{aligned}$$

a) Mit $P(M_1 \mid G_i) = P(M_1 \setminus M_2 \mid G_i) + P(M_1 \cap M_2 \mid G_i)$ und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned} P(M_1) &= \sum_{i=1}^{4} P(M_1 \mid G_i) \cdot P(G_i) \\ &= 0{,}35 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}4 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}55 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}45 \cdot \frac{1}{7} \\ &\approx 0{,}4071 \end{aligned}$$

b) Mit $P(\overline{M_1 \cup M_2} \mid G_i) = 1 - P(M_1 \setminus M_2 \mid G_i) - P(M_2 \setminus M_1 \mid G_i) - P(M_1 \cap M_2 \mid G_i)$ und dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit folgt:

$$\begin{aligned} P(\overline{M_1 \cup M_2}) &= \sum_{i=1}^{4} P(\overline{M_1 \cup M_2} \mid G_i) \cdot P(G_i) \\ &= 0{,}25 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}1 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}15 \cdot \frac{1}{7} \\ &\approx 0{,}1857 \end{aligned}$$

c) Mit dem Satz von Bayes folgt:

$$\begin{aligned} P(G_1 \mid M_2 \setminus M_1) &= \frac{P(M_2 \setminus M_1 \mid G_1) \cdot P(G_1)}{\sum_{i=1}^{4} P(M_2 \setminus M_1 \mid G_i) \cdot P(G_i)} \\ &= \frac{0{,}4 \cdot \frac{3}{7}}{0{,}4 \cdot \frac{3}{7} + 0{,}5 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}25 \cdot \frac{1}{7} + 0{,}4 \cdot \frac{1}{7}} \\ &\approx 0{,}4211 \end{aligned}$$

Aufgabe 3: Es werde aus 3 Urnen hintereinander gezogen. In den ersten zwei Urnen befinden sich je sechs Kugeln, beschriftet mit den Zahlen von 1 bis 6, und in der letzten Urne zwei Kugeln, beschriftet mit 0 und 1. Außerdem seien die Ereignisse A, B, C definiert durch:

$A :=$ „Die Summe der drei gezogenen Zahlen ist gerade.“
$B :=$ „Die Summe der aus den ersten beiden Urnen gezogenen Zahlen ist mindestens 10.“
$C :=$ „Die Kugel aus der letzten Urne zeigt eine 1.“

a) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A, B, C paarweise stochastisch unabhängig sind.

b) Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A, B, C stochastisch unabhängig sind.

$\boxed{6+4}$

Lösung:
Wir definieren das zugrundeliegende Laplace Experiment:

$$\Omega := \{1, \dots, 6\}^2 \times \{0, 1\}$$

Daraus folgt, dass $|\Omega| = 6^2 \cdot 2 = 72$ und $p(\omega) = \frac{1}{72}\ \forall\, \omega \in \Omega$.

a)

$$\begin{aligned} A :=\ & (\{1,3,5\}^2 \times \{0\}) \cup (\{2,4,6\}^2 \times \{0\}) \cup (\{1,3,5\} \times \{2,4,6\} \times \{1\}) \\ & \cup (\{2,4,6\} \times \{1,3,5\} \times \{1\}) \\ B :=\ & (\{4\} \times \{6\} \times \{0,1\}) \cup (\{5\} \times \{5,6\} \times \{0,1\}) \cup (\{6\} \times \{4,5,6\} \times \{0,1\}) \\ C :=\ & \{1, \dots, 6\}^2 \times \{1\} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |A| = 36, \quad P(A) = \tfrac{1}{2} \\ |B| = 12, \quad P(B) = \tfrac{1}{6} \\ |C| = 36, \quad P(C) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned} A \cap B =\ & \{(4,6,0), (5,5,0), (5,6,1), (6,4,0), (6,5,1), (6,6,0)\} \\ A \cap C =\ & (\{1,3,5\} \times \{2,4,6\} \times \{1\}) \cup (\{2,4,6\} \times \{1,3,5\} \times \{1\}) \\ B \cap C =\ & \{(4,6,1), (5,5,1), (5,6,1), (6,4,1), (6,5,1), (6,6,1)\} \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |A \cap B| = 6, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{12} \\ |A \cap C| = 18, \quad P(A \cap C) = \frac{1}{4} \\ |B \cap C| = 6, \quad P(B \cap C) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) = \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{6} &= P(A) \cdot P(B) \\ P(A \cap C) = \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} &= P(A) \cdot P(C) \\ P(B \cap C) = \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{6} \cdot \tfrac{1}{2} &= P(B) \cdot P(C) \end{aligned}$$

Die Ereignisse A, B, C sind paarweise stochastisch unabhängig.

b)

$$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{(5,6,1),(6,5,1)\} \\ |A \cap B \cap C| &= 2 \\ P(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{36} \end{aligned}$$

Es gilt aber:

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{24} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

Die Ereignisse A, B, C sind stochastisch nicht unabhängig.

Aufgabe 4: Ein gewöhnlicher sechsseitiger Spielwürfel werde 6000-mal geworfen. Es bezeichne A dabei im Folgenden das Ereignis

„Es werden mindestens 951 und maximal 1049 Vieren gewürfelt.“

a) Geben Sie einen möglichst einfachen Term für die exakte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ an.

b) Schätzen Sie $P(A)$ mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ab.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung ein möglichst kleines $k \in \mathbb{R}$, so dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens $1000 - k$ und maximal $1000 + k$ Vieren gewürfelt werden, bei mindestens 90% liegt.

$\boxed{3+3+4}$

Lösung:

a) Das Experiment kann durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 6000$ und $p_0 = \frac{1}{6}$ beschrieben werden. Daher gilt:

$$P(A) = \sum_{i=951}^{1049} \binom{6000}{i} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{6000-i}$$

b) Mit der Tschebyscheff'schen Ungleichung, $E(X) = n \cdot p_0 = 1000$ und $Var(X) = n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0) = \frac{2500}{3}$ folgt:

$$\begin{aligned} P(951 \leq X \leq 1049) &= P(-49 \leq X - E(X) \leq 49) \\ &= P(|X - E(X)| \leq 49) = 1 - P(|X - E(X)| \geq 50) \\ &\geq 1 - \frac{Var(X)}{50^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \approx 0{,}6667 \end{aligned}$$

c) Mit der Tschebyscheff'schen Ungleichung, $E(X) = n \cdot p_0 = 1000$ und $Var(X) = n \cdot p_0 \cdot (1 - p_0) = \frac{2500}{3}$ folgt:

$$\begin{aligned} P(1000 - k \leq X \leq 1000 + k) &= P(-k \leq X - E(X) \leq k) \\ &= P(|X - E(X)| \leq k) = 1 - P(|X - E(X)| \geq k + 1) \\ &\geq 1 - \frac{Var(X)}{(k+1)^2} \geq 0,9 \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} -\frac{\frac{2500}{3}}{(k+1)^2} &\geq -0,1 \\ \frac{\frac{2500}{3}}{(k+1)^2} &\leq 0,1 \\ \frac{25000}{3} &\leq (k+1)^2 \\ \sqrt{\frac{25000}{3}} &\leq k+1 \\ 91{,}2870 &\leq k+1 \\ 90{,}2870 &\leq k \end{aligned}$$

Somit gilt $k = 91$.

Aufgabe 5:

a) Berechnen Sie mit Stirling eine Näherungsformel für den Ausdruck $\binom{8n}{2n}$.

b) Berechnen Sie die Anzahl der Stellen sowie die ersten vier Ziffern von $\binom{4800}{3600}$.
Hinweis: Für $x > 0$ gilt $x = 10^{\log_{10} x}$.

$\boxed{5+5}$

Lösung:

a)

$$\begin{aligned}
\binom{8n}{2n} = \frac{(8n)!}{(6n)! \cdot (2n)!} &\approx \frac{(8n)^{8n} e^{-8n} \sqrt{2\pi 8n}}{(6n)^{6n} e^{-6n} \sqrt{2\pi 6n} \cdot (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2\pi 2n}} \\
&= \frac{(8n)^{8n} \sqrt{4}}{(6n)^{6n} \sqrt{2\pi 6n} \cdot (2n)^{2n}} \\
&= \frac{(8n)^{8n}}{(6n)^{6n} \cdot (2n)^{2n}} \sqrt{\frac{1}{3\pi n}} \\
&= \left(\frac{8}{6}\right)^{6n} \cdot \left(\frac{8}{2}\right)^{2n} \sqrt{\frac{1}{3\pi n}} \\
&= \left(\frac{8^3 \cdot 8}{6^3 \cdot 2}\right)^{2n} \sqrt{\frac{1}{3\pi n}} \\
&= \left(\frac{256}{27}\right)^{2n} \sqrt{\frac{1}{3\pi n}}
\end{aligned}$$

b) Mit der Formel aus a), $\binom{8n}{6n} = \binom{8n}{8n-6n} = \binom{8n}{2n}$ und $n = 600$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\binom{4800}{3600} = \binom{4800}{1200} \approx \left(\frac{256}{27}\right)^{1200} \sqrt{\frac{1}{1800\pi}} \\
&= 10^{1200 \cdot \log_{10} \frac{256}{27}} \sqrt{\frac{1}{1800\pi}} \\
&\approx 10^{1172{,}2514} \cdot \sqrt{\frac{1}{1800\pi}} \\
&= 10^{1172} \cdot 10^{0{,}2514} \cdot \sqrt{\frac{1}{1800\pi}} \\
&\approx 0{,}023724 \cdot 10^{1172} \\
&= 2{,}3724 \cdot 10^{1170}
\end{aligned}$$

Die Zahl hat damit 1171 Stellen und beginnt mit den Ziffern 2372.

Aufgabe 6: Von den 1000 Studenten einer Universität sei bekannt, dass 446 Mathematik, 190 Physik, 312 Chemie und 243 Biologie studieren. Außerdem sei bekannt:

- 80% der Physikstudenten studieren auch Mathematik.
- 10% der Physikstudenten studieren auch Chemie.
- 10% der Physikstudenten studieren auch Biologie.
- 50% der Chemiestudenten studieren auch Mathematik.
- 25% der Chemiestudenten studieren auch Biologie.
- $33{,}\overline{3}$% der Biologiestudenten studieren auch Mathematik.
- Jede Fächerkombination dreier dieser vier Fächer wird jeweils von 5 Studenten studiert.
- Keiner studiert alle vier Fächer.

Wie viele Studenten studieren unter diesen Voraussetzungen keines dieser vier Fächer?
Hinweis: Verwenden Sie die Inklusions-Exklusions-Formel (Siebformel von Sylvester-Poincaré). $\boxed{10}$

Lösung:

Wir definieren zunächst die folgenden Ereignisse:

$$\begin{aligned} M &:= \text{„der Student/die Studentin studiert Mathematik“} \\ P &:= \text{„der Student/die Studentin studiert Physik“} \\ C &:= \text{„der Student/die Studentin studiert Chemie“} \\ B &:= \text{„der Student/die Studentin studiert Biologie“} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$|\Omega| = 1000,$$
$$|M| = 446, |P| = 190, |C| = 312, |B| = 243,$$
$$|M \cap P| = 152, |M \cap C| = 156, |M \cap B| = 81, |P \cap C| = 19, |P \cap B| = 19, |C \cap B| = 78,$$
$$|M \cap P \cap C| = 5, |M \cap P \cap B| = 5, |M \cap C \cap B| = 5, |P \cap C \cap B| = 5,$$
$$|M \cap P \cap C \cap B| = 0$$

Mit der Inklusions-Exklusions-Formel ergibt sich:

$$|M \cup P \cup C \cup B| = 446 + 190 + 312 + 243 - 152 - 156 - 81 - 19 - 19 - 78 + 5 + 5 + 5 + 5 - 0 = 706$$

und

$$|\overline{M \cup P \cup C \cup B}| = 1000 - 706 = 294$$

Aufgabe 7: Die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Regentropfen, die pro Minute auf ein $1\,\mathrm{cm}^2$ großes Flächenstück fallen, sei in guter Näherung durch eine Poisson-Verteilung beschrieben. Nun betrachte man zwei verschiedene Städte: Eine Stadt, in der es leicht nieselt mit durchschnittlich 0,1 Regentropfen pro Quadratzentimeter und Minute, und eine andere Stadt, auf die ein leichter Regen mit durchschnittlich 0,9 Regentropfen pro Quadratzentimeter und Minute niederfällt.

a) Berechnen Sie für beide Städte die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute mindestens 2 Regentropfen auf ein vorgegebenes Flächenstück der Größe $1\,\mathrm{cm}^2$ fallen.

b) Nun werde in beiden Städten gleichzeitig gemessen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass innerhalb einer Minute 2 Regentropfen auf die $2\,\mathrm{cm}^2$ große Fläche fallen.

$\boxed{5+5}$

Lösung:

a) Wir definieren:

$A_1 :=$ „mind. 2 Regentropfen fallen in einer Minute auf das Flächenstück in Stadt 1"

$A_2 :=$ „mind. 2 Regentropfen fallen in einer Minute auf das Flächenstück in Stadt 2"

Aus dem Text kann man schließen, dass $\lambda_1 = 0{,}1$ und $\lambda_2 = 0{,}9$ sind. Daher gilt:

$$\begin{aligned} P(A_1) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0{,}1^k}{k!} \cdot e^{-0{,}1} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{0{,}1^k}{k!} \cdot e^{-0{,}1} \\ &\approx 0{,}004679 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(A_2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{0{,}9^k}{k!} \cdot e^{-0{,}9} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{1} \frac{0{,}9^k}{k!} \cdot e^{-0{,}9} \\ &\approx 0{,}2275 \end{aligned}$$

b) Wir definieren:

$A_3 :=$ „2 Regentropfen fallen in einer Minute auf die $2\,\mathrm{cm}^2$ große Gesamtfläche"

Das Ereignis A_3 ergibt sich aus der Kombination zweier unabhängiger, Poisson-verteilter Ereignisse und ist damit wieder Poisson-verteilt mit $\lambda_3 = \lambda_1 + \lambda_2 = 0{,}1 + 0{,}9 = 1$. Daher gilt:

$$\begin{aligned} P(A_3) &= \frac{1^2}{2!} \cdot e^{-1} \\ &\approx 0{,}1840 \end{aligned}$$

Aufgabe 8: Ein Kartenstapel aus 20 Karten, beschriftet mit den Zahlen von 1 bis 20, werde in zwei Stapel aufgeteilt. Im ersten Stapel befinden sich die Zahlen von 1 bis 10, im zweiten die Zahlen von 11 bis 20. Nun werde aus jedem Stapel eine Karte gezogen. Außerdem seien die Zufallsgrößen X und Y definiert durch:

$X :=$ „Summe der gezogenen Zahlen."

$Y :=$ „Betrag der Differenz zwischen 20 und der aus dem zweiten Stapel gezogenen Zahl."

a) Geben Sie ein für diese Situation geeignetes Zufallsexperiment (Ω, p) an und definieren Sie X und Y mit Bezug auf dieses Zufallsexperiment.

b) Geben Sie die induzierten Zähldichten p^X und p^Y explizit an.

c) Berechnen Sie $E(X)$ und $E(Y)$, sowie $Var(X)$ und $Var(Y)$.

d) Berechnen Sie $Cov(X, Y)$ und $\rho(X, Y)$.

$\boxed{2+2+4+2}$

Lösung:

a) Wir definieren das zugrundeliegende Laplace Experiment:

$$\Omega := \{1, \ldots, 10\} \times \{11, \ldots, 20\}$$

Daraus folgt, dass $|\Omega| = 10 \cdot 10 = 100$ und $p(\omega) = \frac{1}{100} \; \forall \, \omega \in \Omega$.

Für die Zufallsgrößen X und Y gilt für alle $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$:

$$X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} X((\omega_1, \omega_2)) &= \omega_1 + \omega_2 \\ Y((\omega_1, \omega_2)) &= 20 - \omega_2 \end{aligned}$$

b)

$$p^X(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} & \text{falls } x \in \{12, 30\}, \\ \frac{2}{100} & \text{falls } x \in \{13, 29\}, \\ \frac{3}{100} & \text{falls } x \in \{14, 28\}, \\ \frac{4}{100} & \text{falls } x \in \{15, 27\}, \\ \frac{5}{100} & \text{falls } x \in \{16, 26\}, \\ \frac{6}{100} & \text{falls } x \in \{17, 25\}, \\ \frac{7}{100} & \text{falls } x \in \{18, 24\}, \\ \frac{8}{100} & \text{falls } x \in \{19, 23\}, \\ \frac{9}{100} & \text{falls } x \in \{20, 22\}, \\ \frac{10}{100} & \text{falls } x \in \{21\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$p^Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10} & \text{falls } y \in \{0, \ldots, 9\}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

c)

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20}(i+j)\cdot\frac{1}{100} \\
&= \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20} i\cdot\frac{1}{100} + \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20} j\cdot\frac{1}{100} \\
&= \sum_{i=1}^{10} 10\cdot i\cdot\frac{1}{100} + \sum_{j=11}^{20} 10\cdot j\cdot\frac{1}{100} \\
&= \sum_{i=1}^{10} i\cdot\frac{1}{10} + \sum_{j=11}^{20} j\cdot\frac{1}{10} \\
&= 5{,}5 + 15{,}5 \\
&= 21
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20}(i+j)^2\cdot\frac{1}{100} \\
&= \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20} i^2\cdot\frac{1}{100} + \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20} 2\cdot i\cdot j\cdot\frac{1}{100} + \sum_{i=1}^{10}\sum_{j=11}^{20} j^2\cdot\frac{1}{100} \\
&= \sum_{i=1}^{10} 10\cdot i^2\cdot\frac{1}{100} + 2\left(\sum_{i=1}^{10} i\cdot\frac{1}{10}\right)\left(\sum_{j=11}^{20} j\cdot\frac{1}{10}\right) + \sum_{j=11}^{20} 10\cdot j^2\cdot\frac{1}{100} \\
&= \sum_{i=1}^{10} i^2\cdot\frac{1}{10} + 2\left(\sum_{i=1}^{10} i\cdot\frac{1}{10}\right)\left(\sum_{j=11}^{20} j\cdot\frac{1}{10}\right) + \sum_{j=11}^{20} j^2\cdot\frac{1}{10} \\
&= 38{,}5 + 2\cdot 5{,}5\cdot 15{,}5 + 248{,}5 \\
&= 457{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= 457{,}5 - 21^2 \\
&= 16{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \sum_{j=11}^{20}(20-j)\cdot\frac{1}{10} \\
&= \sum_{k=0}^{9} k\cdot\frac{1}{10} \\
&= 4{,}5
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(Y^2) &= \sum_{j=11}^{20}(20-j)^2\cdot\frac{1}{10} \\
&= \sum_{k=0}^{9} k^2\cdot\frac{1}{10} \\
&= 28{,}5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Var(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \\
&= 28{,}5 - 4{,}5^2 \\
&= 8{,}25
\end{aligned}
$$

d) Berechnen Sie $Cov(X,Y)$ und $\rho(X,Y)$.

$$
\begin{aligned}
E(X \cdot Y) &= \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=11}^{20} (i+j) \cdot (20-j) \cdot \frac{1}{100} \\
&= \frac{1}{100} \cdot \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=11}^{20} (20 \cdot i - i \cdot j + 20 \cdot j - j^2) \\
&= \frac{1}{100} \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} \sum_{j=11}^{20} 20 \cdot i - \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=11}^{20} i \cdot j + \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=11}^{20} (20 \cdot j - j^2) \right) \\
&= \frac{1}{100} \cdot \left(\sum_{i=1}^{10} 200 \cdot i - \sum_{i=1}^{10} i \cdot \sum_{j=11}^{20} j + 10 \sum_{j=11}^{20} (20 \cdot j - j^2) \right) \\
&= \frac{1}{100} \cdot \left(200 \cdot \sum_{i=1}^{10} i - 155 \cdot \sum_{i=1}^{10} i + 10 \sum_{j=11}^{20} (20 \cdot j - j^2) \right) \\
&= \frac{1}{100} \cdot \left(45 \cdot \sum_{i=1}^{10} i + 200 \sum_{j=11}^{20} j - 10 \sum_{j=11}^{20} j^2 \right) \\
&= \frac{1}{100} \cdot (45 \cdot 55 + 200 \cdot 155 - 10 \cdot 2485) \\
&= 86{,}25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) \\
&= 86{,}25 - 21 \cdot 4{,}5 \\
&= -8{,}25
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}} \\
&= \frac{-8{,}25}{\sqrt{16{,}5 \cdot 8{,}25}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&\approx -0{,}7071
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9: Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

Falls im Folgenden nicht näher spezifiziert bezeichne (Ω, p) immer ein diskretes Zufallsexperiment mit Träger Ω^* und Wahrscheinlichkeitsverteilung P, wobei A, B, C Ereignisse und X, Y Zufallsgrößen über Ω seien.

		WAHR	FALSCH
1.	Ist Ω^* endlich, so existiert $Var(X)$.	☒	☐
2.	Gilt $P^X = P^Y$, so folgt $X = Y$.	☐	☒
3.	Existieren $E(X)$ und $Var(X)$, so gilt für alle $\epsilon > 0$: $$P(\lvert X - E(X)\rvert > \epsilon) < \frac{Var(X)}{\epsilon^2}.$$	☐	☒
4.	Sind die Zufallsgrößen X und Y unkorreliert, so sind sie auch stochastisch unabhängig.	☐	☒
5.	Auf einem See schwimmen Enten: 37 Weibchen und 52 Männchen. Werden von Jägern zufällig 12 dieser Tiere geschossen, so befinden sich darunter im Durchschnitt 5 oder mehr Männchen.	☒	☐
6.	Falls $Var(X) = Var(Y) = 1$, dann gilt $Cov(X, Y) \leq 1$.	☒	☐
7.	Es gilt $P(A) - P(B) = P(A \setminus B) - P(B \setminus A)$.	☒	☐
8.	Es gibt 1260 unterscheidbare Möglichkeiten, 9 Personen so in drei Gruppen aufzuteilen, dass je eine Gruppe aus 2,3 bzw. 4 Personen besteht.	☒	☐
9.	Sind A, B, C stochastisch unabhängig, so sind auch $A \cup B$ und C stochastisch unabhängig.	☒	☐
10.	Existieren $E(X)$ und $Var(X)$, so existiert auch $E(X^2)$.	☒	☐

Für r richtige und f falsche gegebene Antworten erhalten Sie $2 \cdot \max\{0, r - f\}$ Punkte.
Nicht beantwortete Fragen werden dabei nicht gewertet. $\boxed{20}$

Erläuterungen:

1. Ist Ω^* endlich, so sind die beiden Summen $E(X) = \sum_{\omega \in \Omega^*} X(\omega) \cdot p(\omega)$ und $Var(X) = \sum_{\omega \in \Omega^*} [X(\omega) - E(X)]^2 \cdot p(\omega)$ endlich und damit insbesondere absolut konvergent.

2. Gegenbeispiel: Aus der Vorlesung bekannt, siehe Bemerkung 4.7.

3. Gegenbeispiel: Gilt $Var(X) = 0$ für die Zufallsgröße X, so ergibt sich für alle $\epsilon > 0$ die Ungleichungskette $0 \leq P(|X - E(X)| > \epsilon) < \dfrac{Var(X)}{\epsilon^2} = 0$, Widerspruch.

4. Gegenbeispiel: Aus der Vorlesung bekannt, siehe Beispiel 6.21.

5. Die Situation wird durch die hypergeometrische Verteilung $H_{89,52,12}$ mit dem Erwartungswert $12 \cdot \frac{52}{89} \approx 7{,}01 > 5$ beschrieben.

6. Beweis: Laut Cauchy-Schwarz'scher Ungleichung gilt $Cov(X,Y)^2 \leq Var(X) \cdot Var(Y) = 1$ und somit $-1 \leq Cov(X,Y) \leq 1$.

7. Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} P(A) - P(B) &= P(\,(A \setminus B) \,\dot{\cup}\, (A \cap B)\,) - P(\,(B \setminus A) \,\dot{\cup}\, (A \cap B)\,) \\ &= [P(A \setminus B) + P(A \cap B)] - [P(B \setminus A) + P(A \cap B)] \\ &= P(A \setminus B) - P(B \setminus A). \end{aligned}$$

8. Es gibt $\binom{9}{2}$ Möglichkeiten, aus den 9 Personen eine Zweiergruppe auszuwählen, und anschließend jeweils $\binom{7}{3}$ Möglichkeiten, aus den verbliebenen 7 Personen eine Dreiergruppe auszuwählen. Man erhält somit insgesamt $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{3} = 1260$ unterscheidbare Aufteilungen.

9. Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} P((A \cup B) \cap C) &= P((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) \\ &= P(A)P(C) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C) \\ &= (P(A) + P(B) - P(A)P(B))P(C) \\ &= (P(A) + P(B) - P(A \cap B))P(C) \\ &= P(A \cup B)P(C). \end{aligned}$$

10. Beweis: Es gilt die Abschätzung $X^2 \leq 2(X - E(X))^2 + 2E(X)^2$, wobei mit $E(X)$ und $Var(X)$ der Erwartungswert $E(2(X-E(X))^2+2E(X)^2) = 2E((X-E(X))^2)+2E(X)^2 = 2Var(X)+2E(X)^2$ existiert. Nach dem Majorantenkriterium existiert damit auch $E(X^2)$.