Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2010

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 10

Aufgabe 37

a) Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung n. Wieviele Elemente in G sind Erzeuger der ganzen Gruppe?

b) Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:

$$|G| \text{ ist ungerade} \Leftrightarrow \text{für alle } x \in G \text{ existiert ein } y \in G, \text{ so dass gilt: } x = y^2$$

Aufgabe 38

a) Eine endliche Gruppe G und eine Primzahl p seien derart gegeben, dass G genau m Untergruppen der Ordnung p besitze. Zeigen Sie, dass $m(p-1)$ die Anzahl der Elemente von G mit Ordnung p ist.

b) Wenden Sie a) an, um zu zeigen, dass in einer nicht zyklischen Gruppe der Ordnung 55 mindestens eine Untergruppe der Ordnung 5 sowie mindestens eine der Ordnung 11 existieren.

Aufgabe 39

Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

a) Wenn $[G : U] = 2$, dann ist U ein Normalteiler von G.

b) Finden Sie eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_3, die kein Normalteiler ist.

Aufgabe 40

a) Zeigen Sie, dass jedes Element der Gruppe $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ endliche Ordnung besitzt.

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ \rightarrow \ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ \text{ definiert durch } \ \varphi(a) = n \cdot a$$

ein Epimorphismus ist. Zeigen Sie weiter, dass gilt

$$\ker\varphi \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}.$$

Abgabe: Bis Montag, den 28. Juni 2010, 9:00 im Postkasten LE 4.Etage.