Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter SS 2010

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 6

Aufgabe 21

Es sei $d_{n,m}$ die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit genau m Fixpunkten. Die Zahlen $D_n := d_{n,0}$ heißen Derangement-Zahlen.

a) Geben Sie alle Permutationen der Menge $\{1,2,3,4,5\}$ mit genau zwei Fixpunkten an. Finden Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $d_{n,n-3}$, $n \geq 3$.

b) Es ist $D_0 = 1$ und $D_1 = 0$. Zeigen Sie für alle $n \geq 2$:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}).$$

(Hinweis: Entfernen Sie ein Element und unterscheiden Sie, ob dieses in einem 2-Zykel liegt oder nicht.)

Aufgabe 22

a) Sei $a_1, \ldots, a_{21}$ eine aufsteigend geordnete Folge von paarweise verschiedenen natürlichen Zahlen ≤ 100. Beweisen Sie, dass bei Betrachtung aller Differenzen $a_i - a_j$ $(1 \leq j < i \leq 21)$ ein Wert mindestens dreimal vorkommt.

b) Gegeben sei ein 3x7 Schachbrett, dessen Felder in beliebiger Weise mit den Farben rot und blau gefärbt wurden. Zeigen Sie, dass es immer ein Rechteck der Größe mindestens 2x2 gibt, dessen Eckfelder dieselbe Farbe haben.

Aufgabe 23

Im Einheitswürfel seien 2001 Punkte gegeben. Beweisen Sie, dass man 3 Punkte finden kann, die sich innerhalb einer Kugel mit Radius $\frac{\sqrt{3}}{20}$ befinden.

Aufgabe 24

a) Geben Sie für $\sum_{k=0}^{n} kx^k$ $(x \neq 1)$ durch Isolieren der Terme einen geschlossenen Ausdruck an.

b) Geben Sie für $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)}$ durch partielle Summation einen geschlossenen Ausdruck an.

Abgabe: Bis Montag, den 31. Mai 2010, 9:00 im Postkasten LE 4.Etage.