Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2010

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 9

Aufgabe 33

a) Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und e sei neutrales Element in G. Zeigen Sie für $a, b \in G$:

$$a^2 = e \quad \text{und} \quad a^{-1}b^2a = b^3 \quad \Rightarrow \quad b^5 = e$$

b) $(G, \cdot)$ sei eine Gruppe. Beweisen Sie für beliebige $a, x, y \in G$ die folgenden beiden Kürzungsregeln:

$$ax = ay \;\Rightarrow\; x = y \quad \text{und} \quad xa = ya \;\Rightarrow\; x = y$$

Aufgabe 34

a) Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e. Von $a, b \in G$ sei bekannt:

$$a^7 = e, b \neq e \text{ und } aba^{-1} \;=\; b^2.$$

Bestimmen Sie die Ordnung von b.

b) Es sei G eine endliche Gruppe und $x, y \in G$. Zeigen Sie:

$$|x| = |yxy^{-1}|.$$

Aufgabe 35

Bestimmen Sie die Menge aller möglichen Symmetrietransformationen (Drehungen/Spiegelungen) eines Quadrates und zeigen Sie, dass diese Menge eine Gruppe bildet. Zeigen Sie außerdem, dass diese Gruppe der sogennanten Diedergruppe D_4 der Gestalt

$$D_4 = \langle r, f | r^4 = 1, f^2 = 1, rf = fr^{-1} \rangle$$

entspricht.

Hinweis: Die Diedergruppe D_4 hat die Mächtigkeit 8.

Aufgabe 36

Es seien $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ und $K = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ komplexe (2×2)-Matrizen und $\cdot$ sei die übliche Matrizenmultiplikation. Weiter sei $Q := \{E, -E, I, -I, J, -J, K, -K\}$.

a) Zeigen Sie: $(Q, \cdot)$ ist eine Gruppe.

b) Bestimmen Sie alle Untergruppen von Q und die Ordnung jedes Elements.

Abgabe: Bis Montag, den 21. Juni 2010, 9:00 im Postkasten LE 4.Etage.