Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Verena Gondek

SS 2009

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 1

Aufgabe 1

Geben Sie bei den folgenden Mengen an, ob es eine untere Schranke gibt. Falls es eine solche gibt, geben Sie die untere Grenze an, die nach dem Wohlordnungsaxiom existiert.

(a) $A := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 25\}$

(b) $B := \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2y \text{ für ein } y \in \mathbb{Z}\}$

(c) $C := \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in 3\mathbb{N}\}$

(d) $D := \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 50x\}$

Aufgabe 2

(a) Beweisen Sie die folgenden beiden Aussagen:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $2 \mid n^2 + 3n$.

(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $6 \mid n^3 + 3n^2 + 2n$.

(b) Finden Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, für das gilt:

$$n_0! \geq 2^{n_0}.$$

Beweisen Sie weiter, dass diese Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt.

Aufgabe 3

(i) Bestimmen Sie den größten gemeinsamen Teiler d der beiden Zahlen $a = 1708$ und $b = 620$ sowie Zahlen $x, y \in \mathbb{Z}$, so dass $d = ax + by$ ist.

(ii) Zeigen sie, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ gilt: $\mathrm{ggT}(a,b) \cdot \mathrm{kgV}(a,b) = a \cdot b$.

Aufgabe 4

Gegeben sei eine Menge A sowie eine binäre Relationen $R_i, S, T \subseteq A \times A$ mit $i \in I$. Zeigen Sie:

(i) $(S \circ T)^{-1} = T^{-1} \circ S^{-1}$,

(ii) $(\bigcap_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcap_{i \in I} R_i^{-1}$,

(iii) $(\bigcup_{i \in I} R_i)^{-1} = \bigcup_{i \in I} R_i^{-1}$.

Hinweis: $R^{-1} := \{(b,a) \in A \times A \mid (a,b) \in R\}$ und $S \circ T := \{(s,t) \in A \times A \mid (s,x) \in S \text{ und } (x,t) \in T\}$.

Abgabe: Bis Montag, den 27.April 2009, 10:30 im Postkasten LE 4.Etage.