Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Verena Gondek

SS 2009

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 2

Aufgabe 5

(a) Berechnen Sie $\phi(19), \phi(20)$ und $\phi(437)$.

(b) Zeigen Sie: Ist $n = p^m$ für eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ und $m \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\phi(n) \;=\; p^m - p^{m-1}.$$

(c) Widerlegen Sie die Behauptung

$$\phi(ab) \;=\; \phi(a) \cdot \phi(b)$$

durch ein Gegenbeispiel. Unter welchen Voraussetzungen für a und b gilt diese Behauptung? (Begründen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 6

Das kleinste gemeinsame Vielfache zweier Zahlen sei definiert als:

$$\mathrm{kgV}(a,b) := \frac{ab}{\mathrm{ggT}(a,b)}.$$

Zeigen Sie folgenden Satz: Ist $m \in \mathbb{Z}$, so folgt aus $a \mid m$ und $b \mid m$ stets $\mathrm{kgV}(a,b) \mid m$.

Aufgabe 7

(i) Es seien a und b positive ganze Zahlen sowie $d = \mathrm{ggT}(a,b)$. Zeigen Sie: Es gibt genau dann $x, y \in \mathbb{Z}$, mit $ax + by = c$, wenn $d \mid c$.

(ii) Finden Sie $x, y \in \mathbb{Z}$, welche die Gleichung $966x + 686y = 70$ erfüllen.

Aufgabe 8

(i) Die ganzen Zahlen x_n seien wie folgt rekursiv definiert:

$$x_1 = 2 \text{ und } x_n = x_{n-1} + 2n \text{ für } n \geq 2.$$

Berechnen Sie eine explizite Darstellung für x_n und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und beweisen Sie deren Korrektheit.

(ii) Die ganzen Zahlen f_n seien wie folgt rekursiv definiert:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 2 \text{ und } f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \text{ für } n > 2.$$

Zeigen Sie, dass $\mathrm{ggT}(f_{n+1}, f_n) = 1$ für alle $n \geq 1$.

Abgabe: Bis Montag, den 4. Mai 2009, 10:30 im Postkasten LE 4.Etage.