Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Verena Gondek

SS 2009

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 6

Aufgabe 21 (6 Punkte)

(i) In einem Seminar von 105 Mathematikstudenten beherrschen 20% die französische Sprache, $\frac{2}{3}$ die englische und 13 beide Sprachen. Wieviele Studenten können mit keiner der beiden Sprachen umgehen?

(ii) Zu der obigen Verteilung kommt hinzu, dass 15 Studenten Russisch sprechen, von denen 12 zusätzlich auch Englisch und 4 alle drei Sprachen beherrschen. 25 Studenten können mit keiner Fremdsprache umgehen. Wieviele beherrschen ausschließlich Russisch und Französisch als Fremdsprache?

Aufgabe 22 (6 Punkte)

1. n verheiratete Paare sollen an einen runden Tisch gesetzt werden. Zeigen Sie, dass es für $n \geq 2$ genau $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^k(2n-k-1)!$ Möglichkeiten gibt, die Personen so am Tisch zu verteilen, dass kein verheiratetes Paar nebeneinander sitzt.

2. Wieviele Möglichkeiten gibt es, $n \geq 2$ verheiratete Paare so an einen runden Tisch zu setzen, dass kein Paar nebeneinander sitzt und Männer und Frauen immer abwechselnd platziert sind?

Anmerkung: Sitzordnungen, die durch Drehung des Tisches ineinander überführt werden können, werden hier als gleich interpretiert.

Aufgabe 23 (6 Punkte)

Verallgemeinern Sie das Prinzip der Inklusion - Exklusion. Es seien $E_1, \dots, E_n$ Eigenschaften der Elemente einer Menge M. Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente, die genau t Eigenschaften erfüllen, gegeben ist durch:

$$\sum_{i_1<\dots<i_t} N(E_{i_1}\dots E_{i_t}) - \binom{t+1}{t}\sum_{i_1<\dots<i_{t+1}} N(E_{i_1}\dots E_{i_{t+1}}) + \dots \pm \binom{n}{t}N(E_1\dots E_n).$$

<u>Hinweis:</u> Es gilt für natürliche Zahlen $m \leq k \leq n$ die Beziehung: $\binom{k}{m}\binom{n}{k} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{n-k}$.

Aufgabe 24 (6 Punkte)

Unter einer Halbgruppe versteht man eine Menge H mit einer Verküpfung $* : H \times H \to H$, wobei folgende Eigenschaft erfüllt ist:

$$(x * y) * z = x * (y * z) \text{ für alle } x, y, z \in H.$$

Es sei nun $(H, *)$ eine Halbgruppe. Zeigen Sie, dass dann $(Pot(H), \otimes)$ mit

$$\otimes : \begin{cases} Pot(H) \times Pot(H) & \to \quad Pot(H) \\ (H_1, H_2) & \to \quad H_1 \otimes H_2 := \{h_1 * h_2 | h_1 \in H_1,\, h_2 \in H_2\} \end{cases}$$

ebenfalls eine Halbgruppe ist. Entscheiden Sie, ob für eine Gruppe $(G, *)$ die Menge $Pot(G)$ mit der angegebenen Verknüpfung $\otimes$ eine Gruppe bildet (mit Begründung!).

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3. Juni 2009, 10:30 im Postkasten LE 4.Etage.