Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Verena Gondek

SS 2009

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 7

Aufgabe 25 (6 Punkte)

1. Es seien $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:
   (a) $U \leq G$.
   (b) $(U, \cdot)$ ist eine Gruppe.
2. Zeigen Sie, dass
   $$G := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \text{ mit } a^2 + b^2 \neq 0 \right\}$$
   mit der Matrixmultiplikation eine abelsche Gruppe ist.

Aufgabe 26 (6 Punkte)

1. Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e.
   Von $a, b \in G$ sei bekannt:
   $$a^7 = e, b \neq e \text{ und } aba^{-1} \; = \; b^2.$$
   Bestimmen Sie die Ordnung von b.
2. Es sei G eine endliche Gruppe und $x, y \in G$. Zeigen Sie:
   $$|x| = |yxy^{-1}|.$$

Aufgabe 27 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Menge aller möglichen Symmetrietransformationen (Drehungen/Spiegelungen) eines Quadrates und zeigen Sie, dass diese Menge eine Gruppe bildet. Zeigen Sie außerdem, dass diese Gruppe der sogennanten Diedergruppe D_4 der Gestalt:

$$D_4 = \langle r, f | r^4 = 1, f^2 = 1, rf = fr^{-1} \rangle.$$

Hinweis: Die Diedergruppe D_4 hat die Mächtigkeit 8.

Aufgabe 28 (6 Punkte)

1. Es sei G eine Gruppe mit neutralem Element e und $a, b \in G$. Zeigen Sie: Falls $a^2 = e$ und $a^{-1}b^2a = b^3$, so folgt $b^5 = e$.
2. Zeigen Sie: Jede Gruppe mit vier Elementen ist abelsch.

Abgabe: Bis Montag, den 8. Juni 2009, 10:30 im Postkasten LE 4.Etage.