Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Verena Gondek

SS 2009

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 8

Aufgabe 29 (6 Punkte)

Die Gruppe G werde erzeugt von den Elementen x, y, wobei $|x| = 2$ und $|y| = 3$. Außerdem gelte $(xy)^2 = e$. Zeigen Sie, dass diese Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_3 ist.

Hinweis: $G =< x, y >$ bedeutet, dass G aus allen endlichen Produkten $x^{m_1}y^{m_2}x^{m_3}y^{m_4}...$ besteht.

Aufgabe 30 (6 Punkte)

Es sei G eine Gruppe und U eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

1. Wenn $[G : U] = 2$, dann ist U ein Normalteiler von G.
2. Finden Sie eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_3, die kein Normalteiler ist.

Aufgabe 31 (6 Punkte)

Es sei (G eine Gruppe und U und V seien Normalteiler von G. Die Ordnungen dieser Normalteiler seien teilerfremd, d.h. es gelte $\mathrm{ggT}(|U|, |V|) = 1$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. $U \cap V = \{e\}$.
2. $uv = vu$ für alle $u \in U$, $v \in V$.

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Zeigen Sie:

1. Das Zentrum $Z(G)$ von G und jede Untergruppe von $Z(G)$ sind Normalteiler von G.
2. Aus $ab \in Z(G)$ folgt $ab = ba$.
3. Es sei $G \neq Z(G)$. Dann gilt: Für alle $g \in G$ ist die Gruppe $< \{g\} \cup Z(G) >$ abelsch. Außerdem ist $[G : Z(G)]$ keine Primzahl.

Abgabe: Bis Montag, den 15. Juni 2009, 10:30 im Postkasten LE 4.Etage.