Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Verena Gondek

SS 2009

Übungen zu Algebra und Diskrete Mathematik I

Blatt 9

Aufgabe 33 (6 Punkte)

Es seien die folgenden beiden Mengen gegeben:

$$\begin{aligned} GL_n(K) &:= \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K) | \det(A) \neq 0\} \\ SL_n(K) &:= \{A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(K) | \det(A) = 1\} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass $(GL_n(K), \cdot)$ bzgl. der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Zeigen Sie:

1. $SL_n(K)$ ist ein Normalteiler von $GL_n(K)$.
2. Für die zugehörige Faktorgruppe gilt:

$$GL_n(K)/SL_n(K) \cong U(K)$$

   Zur Erinnerung: $U(K)$ bezeichnet die Menge der invertierbaren Elemente in K.

Aufgabe 34 (6 Punkte)

Zeigen Sie für $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m > 1$, dass n ein Teiler von $\phi(m^n - 1)$ ist.

Aufgabe 35 (6 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. Ist $(N_i)_{i \in I}$ eine Familie von Normalteilern von G, so ist auch $\bigcap\limits_{i \in I} N_i$ ein Normalteiler.
2. Sind U und N Normalteiler von G mit $U \leq N$, so ist auch N/U Normalteiler in G/U und

$$(G/U)/(N/U) \cong G/N.$$

3. Sind N_1 und N_2 Normalteiler von G, so auch $N_1 N_2$.

Aufgabe 36 (6 Punkte)

G sei eine nicht abelsche Gruppe mit $|G| = 8$. Es sei außerdem $a \in G$ mit $| < a > | = 4$ und es gelte:

$$G/ < a >= \{< a >, b < a >\} \text{ mit } a^2 = b^2.$$

Sie können dabei ohne Beweis voraussetzen, dass $< a >$ ein Normalteiler von G ist. Bestimmen Sie die Ordnung von $b^{-1}ab \in < a >$ und zeigen Sie, dass $b^{-1}ab = a^3$ gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 22. Juni 2009, 10:30 im Postkasten LE 4.Etage.