Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 11

Aufgabe 41 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung, so dass für $v \in V$ und eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: $F^n(v) \neq 0$ und $F^{n+1}(v) = 0$. Dabei bezeichne $F^n(v)$ die $n-$fache Verknüpfung von F mit sich selbst, d.h. $F^n(v) = F \circ \ldots \circ F$ ($n-$mal).

Beweisen Sie, dass dann $v, F(v), \ldots, F^n(v)$ linear unabhängig sind.

Aufgabe 42 (6 Punkte)

Es sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum und $f : V \longrightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $f \circ f = 0$. Ferner sei $\dim V = 2 \cdot \mathrm{Rang}(f)$.

Zeigen Sie: $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.

Aufgabe 43 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit der Dimension $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(1) n ist eine gerade Zahl

(2) Es gibt eine lineare Abbildung $f : V \longrightarrow V$ mit Kern(f)=Bild(f).

Aufgabe 44 (6 Punkte)

Die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ habe bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^3$ und des $\mathbb{R}^2$ die darstellende Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -14 \\ -16 & 23 & 32 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die darstellende Matrix von F, wenn im $\mathbb{R}^3$ die Basis $B = \{(8,1,3),(1,1,0),(2,0,1)\}$ und im $\mathbb{R}^2$ die Basis $C = \{(4,9),(-3,7)\}$ gewählt wird.

Abgabe: Bis Donnerstag, 15.01.2009, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage