Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 45 (6 Punkte)

Stellen Sie die folgenden Permutationen als Produkt von Transpositionen dar und geben Sie das Signum der Permutationen an.

$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

$$\sigma_2 := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 7 & 4 & 5 & 3 & 6 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in S_8$$

Aufgabe 46 (6 Punkte)

(i) Zeigen Sie, dass gilt

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+z \end{bmatrix} = xyz$$

(ii) Zeigen Sie, dass durch

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \det \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -\frac{1}{16} \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & x_1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & x_2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & x_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

eine konstante Funktion $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definiert wird. Berechnen Sie diese Konstante.

Aufgabe 47 (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden drei Aussagen:

(i) Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch (d.h. $-A = A^T$), dann ist A singulär.

(ii) Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, so gibt es keine Matrix $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, mit $B \cdot B = -E_n$.

(iii) Die Aussagen (i) und (ii) sind für gerades $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ nicht richtig.

Aufgabe 48 (6 Punkte)

Es sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, mit $A \cdot A = 0$. Für $t \in \mathbb{R}$ sei $p(t) := \det(E_n + tA)$. Zeigen Sie:

(i) p ist ein Polynom mit $p(t) \cdot p(-t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(ii) $\det(E_n + tA) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 22.01.2009, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage