Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 49 (6 Punkte)

Beweisen Sie mittels Induktion nach n, dass für $n \geq 2$ gilt:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Aufgabe 50 (6 Punkte)

Es sei $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{Z})$ mit $A^2 = 0$.

(i) Zeigen Sie, dass $E_n + A$ regulär ist und bestimmen Sie $(E_n + A)^{-1}$.

(ii) Beweisen Sie: $det(E_n + A) \in \{-1, 1\}$.

Aufgabe 51 (6 Punkte)

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden beiden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Den Vektorraum, der von den Eigenvektoren zu einem bestimmten Eigenwert λ einer Matrix $A \in \text{Mat}_{n \times n}$ aufgespannt wird, nennt man auch Eigenraum zum Eigenwert λ. Bestimmen Sie für die obigen Matrizen die zugehörigen Eigenräume und deren Dimension.

Aufgabe 52 (6 Punkte)

Es sei $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$.

(i) Zeigen Sie, dass A und A^T dieselben Eigenwerte besitzen. Haben A und A^T auch notwendigerweise dieselben Eigenvektoren?

(ii) Zeigen Sie: Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A, dann gilt: $\det(A) = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$

(iii) Zeigen Sie: A ist genau dann invertierbar, wenn $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 29.01.2009, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage