Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 7

Aufgabe 25 (6 Punkte)

(i) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe mit neutralem Element e. Beweisen Sie: Hat G die Eigenschaft

$$\text{(N) für alle } a \in G \text{ gilt } a \circ a = e,$$

so ist G abelsch.

(ii) Gibt es Gruppen $(G, \circ)$ mit der Eigenschaft (N), die

(1) genau drei
(2) genau vier

Elemente haben? Geben Sie entweder eine Gruppentafel an, oder beweisen Sie, dass dies nicht möglich ist.

Aufgabe 26 (6 Punkte)

Gegeben sei der Vektorraum $V = \mathbb{R}^4 := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$. Welche der folgenden Teilmengen $U_i \subset V$ $(i = 1, \ldots, 4)$ sind Unterräume von V und welche nicht? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$\begin{aligned}
U_1 &:= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_3 = 0 \ \wedge \ x_2 + x_4 = 0\big\} \\
U_2 &:= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0 \ \wedge \ x_2 - x_4 = 0\big\} \\
U_3 &:= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 = x_4^2\big\} \\
U_4 &:= \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 \in \mathbb{Q}\big\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 27 (6 Punkte)

Es seien U, V, W Unterräume eines Vektorraumes. Gilt dann stets: $U \cap (V + W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?
(Beweis oder Gegenbeispiel)

Aufgabe 28 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und es seien $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängige Vektoren in V. Ferner sei

$$(*)\ y = k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_nx_n \text{ mit } k_i \in \mathbb{R} \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Man beweise:

$$x_1 - y, \ldots, x_n - y \text{ linear abhängig} \iff k_1 + k_2 + \ldots + k_n = 1$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 4.12.2008, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage