Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 8

Aufgabe 29 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Gegeben seien $a, b \in V$ und $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Ist $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, so existieren eindeutig bestimmte Vektoren $x, y \in V$ mit

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= a \\ \gamma x + \delta y &= b. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie x und y.

Aufgabe 30 (6 Punkte)

(i) Gegeben seien die Vektoren $x_1 = (0,\ \frac{1}{2},\ -1,\ \frac{1}{3}),\ x_2 = (0,\ -\frac{3}{4},\ \frac{3}{2},\ 1) \in \mathbb{R}^4$. Überprüfen Sie, ob x_1 und x_2 linear unabhängig sind und bestimmen Sie zwei weitere Vektoren $x_3, x_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ ist.

(ii) V sei ein Vektorraum. Ferner seien U, W_1 und W_2 Untervektorräume von V. Man beweise oder widerlege:

$$\text{Ist } V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2, \text{ so folgt } W_1 = W_2.$$

Aufgabe 31 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum. U_1, U_2 und U_3 seien Untervektorräume von V. Welche der folgenden Aussagen sind allgemeingültig, welche nicht? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

(i) Sind $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängige Elemente aus U_1 und ist $x_0 \in V \setminus U_1$, so sind $x_0, x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig.

(ii) Sind U_1, U_2 verschieden und beide nicht der Nullvektorraum, so existieren linear unabhängige Elemente u_1, u_2 mit $u_i \in U_i$ $(i = 1, 2)$.

(iii) Sind U_1, U_2, U_3 paarweise verschieden und keiner der Nullvektorraum, so gibt es linear unabhängige Elemente u_1, u_2, u_3 mit $u_i \in U_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

(iv) Gilt für alle $u_1 \in U_1$ und für alle $u_2 \in U_2$, dass u_1 und u_2 linear abhängig sind, so ist $U_1 = U_2$.

Aufgabe 32 (6 Punkte)

Es seien $x_1, \ldots, x_n$ $(n \in \mathbb{N})$ linear unabhängige Elemente eines Vektorraumes V. Das Element $a \in V$ habe folgende Eigenschaft: Für jedes $j \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq n$, sind $x_1, \ldots, x_{j-1}, a, x_{j+1}, \ldots, x_n$ linear abhängig. Beweisen Sie, dass $a = 0$ ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, 11.12.2008, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage