Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

WS 08/09

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 9

Aufgabe 33 (6 Punkte)

(i) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K, sowie $A, B \subset V$ beliebige Teilmengen. $\overline{A}$ bezeichne den von A aufgespannten Untervektorraum. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(b) $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{\overline{A} \cup B}$

(ii) Zeigen Sie für beliebige Unterräume $U_1, \ldots, U_k$ eines endlich-dimensionalen Vektorraumes V, dass gilt:

$$\dim(U_1 + \ldots + U_k) \leq \dim U_1 + \ldots + \dim U_k$$

Aufgabe 34 (6 Punkte)

Es sei V ein Vektorraum und x_1, x_2, x_3, x_4 seien linear unabhängige Vektoren aus V. Es seien

$$\begin{aligned} U_1 &:= \langle x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_3 + x_4,\ x_1 + x_4 \rangle\,, \\ U_2 &:= \langle x_1 + x_3,\ x_2 + x_3 + x_4 \rangle \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Dimension von U_1, U_2, $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$.

Aufgabe 35 (6 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear? (Begründen Sie Ihre Antworten!)

1) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ f_1(x, y) = (x - y, y^2 + 1)$
2) $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3;\ f_2(x, y, z) = (y, 2z, y - x)$
3) $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3;\ f_3(x, y) = (2x - y, 3x + y, y - 2)$
4) $f_4 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ f_4(x, y, z) = (x^2 + y^2, y + z)$
5) $f_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R};\ f_5(x, y) = |x - y|$

Bestimmen Sie für alle lineare Abbildungen f_i Basen von Kern(f_i), Bild(f_i) sowie die Dimensionen dieser Unterräume.

Aufgabe 36 (6 Punkte)

Es sei K ein Körper und $\varphi : K^n \to K^n$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass es Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ derart gibt, dass für alle $x \in K^n$ gilt:

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Abgabe: Bis Donnerstag, 18.12.2008, 10 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage

Ankündigung: Die Weihnachtsfeier des Fachbereichs findet am Mittwoch, den 17.12.2008 ab 14 Uhr im Raum LE 407 statt.