Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 12

Aufgabe 45 (6 Punkte)

Gegeben seien Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_{m\times m}(\mathbb{K}), B \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{m+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{m+n} \end{pmatrix}$$

genau dann lösbar ist, wenn es ein $y \in \mathbb{K}^n$ mit

$$Cy = \begin{pmatrix} \beta_{m+1} \\ \vdots \\ \beta_{m+n} \end{pmatrix}$$

und ein $z \in \mathbb{K}^m$, mit

$$Az = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} - By$$

gibt.

Aufgabe 46 (6 Punkte)

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longrightarrow \det \begin{pmatrix} x & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & & \vdots & 1 \\ a_1 & a_2 & x & & \vdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & 1 \end{pmatrix}$$

ein Polynom n-ten Grades mit den Nullstellen $a_1, \ldots, a_n$ ist.

Aufgabe 47 (6 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $A = (\alpha_{ij}) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, mit den Elementen: $\alpha_{ij} = |i-j|,\ 1 \leq i, j \leq n$.

Aufgabe 48 (6 Punkte)

Eine r-reihige Unterdeterminante einer Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{K})$ mit $r \leq \min(n,m)$ ist eine Determinante einer Matrix aus $\mathrm{Mat}_{r\times r}(\mathbb{K})$, die aus A entsteht, wenn man $m-r$ beliebige Zeilen und $n-r$ beliebige Spalten weglässt. Zeigen Sie:

(a) Falls es eine von Null verschiedene r-reihige Unterdeterminante von A gibt, so gilt $r \leq \mathrm{Rang}(A)$.

(b) Ist $r := \mathrm{Rang}(A)$, so existiert eine von Null verschiedene r-reihige Unterdeterminante von A.

Abgabe: Bis Donnerstag, 27.01.2010, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4. Etage