Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. V. Gondek

WS 2010/2011

Übungen zur Linearen Algebra I

Blatt 13

Aufgabe 49 (6 Punkte)

Es seien $A_0, \dots A_n$ Zeilenvektoren des $\mathbb{R}^n$. Es bezeichne zudem D_k für $0 \leq k \leq n$ die folgende Determinante:

$$D_k = \det \begin{bmatrix} A_0 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}.$$

Beweisen Sie:

$$\det \begin{bmatrix} A_1 + A_0 \\ \vdots \\ A_n + A_0 \end{bmatrix} = D_0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} D_k.$$

Aufgabe 50 (6 Punkte)

Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 12 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie außerdem die Eigenräume und deren Dimension.

Aufgabe 51 (6 Punkte)

Eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{C})$ habe die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von $\alpha \cdot A$ für ein beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$

(b) Berechnen Sie die Eigenwerte von $A - \beta I_n$ für beliebiges $\beta \in \mathbb{C}$. Dabei bezeichne I_n die $n \times n$-Einheitsmatrix.

Aufgabe 52 (6 Punkte)

Bestimmen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ alle Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrix aus $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Die Vielfachheit eines Eigenwertes als Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist mindestens so groß wie die Dimension des zugehörigen Eigenraumes. (Dies muss nicht gezeigt werden.)

Abgabe: Die Lösungen zu diesem Blatt bitte nicht mehr einwerfen!