Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^2$ sei die Vorschrift $\varphi(x, y) := x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ gegeben.

a) Prüfen Sie, ob dadurch ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$ definiert ist.

b) Berechnen Sie $||(4, -2)||$ in $(\mathbb{R}^2, \varphi)$ sowie den Winkel zwischen den Standardbasisvektoren.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Es sei $n \geq 2$, $V = Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ und $sp : V \to \mathbb{R}$ die Spurabbildung. Untersuchen Sie, welche der folgenden Abbildungen $s_i : V \times V \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ Skalarprodukte auf V sind:

a) $s_1(A, B) = sp(A^T \cdot B)$ für $A, B \in V$

b) $s_2(A, B) = sp(A \cdot B)$ für $A, B \in V$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zeigen Sie: Eine symmetrische Matrix $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv definit, wenn gilt $a_{11} > 0$ und $\det A > 0$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Es sei V ein euklid'scher Vektorraum. Zeigen Sie für $x, y \in V$ die folgenden Beziehungen:

a) $||x|| = ||y|| \;\Leftrightarrow\; \langle x + y, x - y\rangle = 0$

b) $||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \;\Leftrightarrow\; \langle x, y\rangle = 0$

c) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Abgabe: Bis Donnerstag, 30.04.2009, 12 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage