Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 45 (6 Punkte)

Gegeben sind die windschiefen Geraden $G_1, G_2 \in \mathbb{R}^3$ durch die Parameterdarstellungen

$$G_1 : \ x(t) = (t, 0, 0)^T, \ t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad G_2 : \ y(t) = (0, t, 1)^T, \ t \in \mathbb{R}$$

Für jedes $t \in \mathbb{R}$ legen wir eine Gerade g_t durch den Punkt $x(t)$ von G_1 und den Punkt $y(t)$ von G_2. Dadurch entsteht eine Schar von Geraden g_t, $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \in g_t \text{ für ein } t \in \mathbb{R}\}$ eine Quadrik im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 46 (6 Punkte)

Orthonormalisieren Sie die Basis $\{(-1, 1, 1)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T\}$ des $\mathbb{R}^3$ bzgl. des Skalarproduktes:

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longmapsto \quad \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} & \longmapsto \quad (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) + (x_2 + x_3)(y_2 + y_3) + (x_3 + x_1)(y_3 + y_1) \end{cases}$$

Aufgabe 47 (6 Punkte)

Beweisen Sie: Jede reguläre Matrix $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{C})$ kann auf genau eine Weise als Produkt $A = UH$ einer unitären Matrix U und einer positiv definiten Matrix H dargestellt werden. Dies ist die sogenannte Polarzerlegung von A.

Hinweis: Betrachten Sie die Matrix $\overline{A}^T A$.

Aufgabe 48 (6 Punkte)

Bestimmen Sie den Typ der Quadrik

$$Q_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \frac{1+a}{2}(x^2 + y^2) + (1 - a)(xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y) + 1 + a = 0 \right\}$$

in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 16.07.2009, 12:00 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage