Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei V ein Euklid'scher Vektorraum und seien $x, y \in V \setminus \{0\}$. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$\left|\left|\frac{||x||}{||y||}y - \frac{||y||}{||x||}x\right|\right| = ||x-y||$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Sei $I = [0,1]$ und $C(I) = \{f \in Abb(I, \mathbb{R} \mid f \text{ stetig auf } I\}$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle \longmapsto \int\limits_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Orthonormieren Sie die Polynome e_0, e_1, e_2 nach dem Verfahren von Gram-Schmidt.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

a) Es sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Beweisen Sie: Genau dann gilt $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, wenn $A + A^T$ positiv definit ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussage:

   Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: Ist $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ und sind alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms von A reell und positiv, dann ist $x^T Ax > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Es seien S, W Matrizen in $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. S sei symmetrisch und W sei regulär. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:

(i) S ist positiv definit.

(ii) WSW^T ist positiv definit.

Abgabe: Bis Donnerstag, 07.05.2009, 12 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage