Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $x = (x_1, x_2)^T, y = (y_1, y_2)^T \in \mathbb{R}^2$. Die Abbildung

$$f(x, y) := ax_1y_1 + bx_1y_2 + bx_2y_1 + cx_2y_2$$

definiert eine symmetrische Bilinearform (Dies muss nicht gezeigt werden!).

Beweisen Sie die folgende Äquivalenz: f ist ein Skalarprodukt $\Leftrightarrow$ $0 < a$, $0 < c$, $b^2 < ac$

Aufgabe 10 (6 Punkte)
Der $\mathbb{R}^n$ sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$A := \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

a) Zeigen Sie: Die linearen Abbildungen $D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto Ax$ und $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto Bx$ sind Isometrien.

b) Durch A wird eine Drehung und durch B eine Spiegelung an der Ursprungsgeraden induziert. Was ergibt sich als Produkt (i) zweier Geradenspiegelungen und (ii) zweier Drehungen?

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Der $\mathbb{R}^n$ sei mit dem kanonischen Skalarprodukt versehen. Bestimmen Sie durch Angabe einer Basis das orthogonale Komplement für den Unterraum $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$.

Aufgabe 12 (6 Punkte)

Es seien $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) A ist genau dann orthogonal, wenn A^T orthogonal ist.

b) Wenn A orthogonal ist, dann ist A^{-1} orthogonal.

c) Wenn A orthogonal ist, dann ist $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

d) Wenn A und B orthogonal sind, dann ist auch $A \cdot B$ orthogonal.

Abgabe: Bis Donnerstag, 14.05.2009, 12 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage