Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Günter Törner
Dipl.-Math. Miriam Dieter

SS 2009

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 25 (6 Punkte)

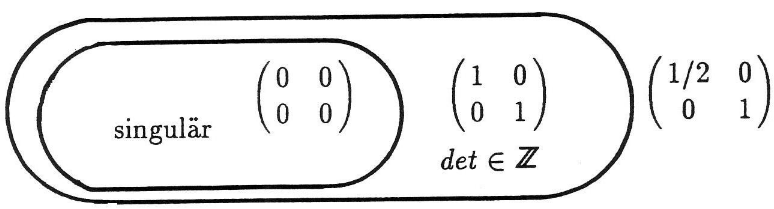
a) Gegeben sei eine invertierbare, orthogonale Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $\det A = 1$. Ferner sei $(A + I_n) \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ ebenfalls invertierbar. Zeigen Sie:
Es gibt genau eine Matrix $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ mit $(I_n - B) \cdot A = I_n + B$, und dieses B ist schiefsymmetrisch.

b) Es sei $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch und $I_n - A$ sei invertierbar. Zeigen Sie:
$B := (I_n - A)^{-1} \cdot (I_n + A)$ ist eine orthogonale Matrix mit $\det B = 1$.

Aufgabe 26 (6 Punkte)

Fertigen Sie einen gemeinsamen "Lageplan"mit Beispielen für die folgenden vier Eigenschaften einer Matrix aus $Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ an: diagonalisierbar, normal, orthogonal, symmetrisch. (Nachweis aller Aussagen!)

Hinweis: Für die zwei Eigenschaften: singulär, ganzzahlige Determinante, ist ein Lageplan mit Beispiel etwa:



Aufgabe 27 (6 Punkte)

Ist $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$, so wird der Rayleigh-Koeffizient $R_A(x)$ für $x \in \mathbb{C}^n$ gemäß Aufgabe 21 definiert. Außerdem sei $w(A) := \{R_A(x) \mid x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}\}$. Beweisen Sie:

a) $w(I_n) = \{1\}$.

b) Aus $w(A) = 1$ folgt $A = I_n$.

c) $w(S^H AS) = w(A)$ für alle $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ und alle unitären Matrizen S.

Aufgabe 28 (6 Punkte)

Es seien $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

a) $Q = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ ist eine orthogonale Matrix, wenn $A + iB$ unitär ist.

b) $Q = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ ist eine symmetrische Matrix, wenn $A + iB$ hermite'sch ist.

Abgabe: Bis Freitag, 12.06.2009, 8:30 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage