Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Es seien $A, B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

a) A ist genau dann orthogonal, wenn A^T orthogonal ist.

b) Wenn A orthogonal ist, dann ist A^{-1} orthogonal.

c) Wenn A orthogonal ist, dann ist $\det(A) = 1$ oder $\det(A) = -1$.

d) Wenn A und B orthogonal sind, dann ist auch $A \cdot B$ orthogonal.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Es sei $(V, \langle\rangle)$ ein endlich dimensionaler reeller euklid'scher Raum. U und W seien Untervektorraäume von V. Zeigen Sie:

(a) $(U + W)^\perp = U^\perp \cap W^\perp$

(b) $(U \cap W)^\perp = U^\perp + W^\perp$

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Der $\mathbb{R}^n$ sei versehen mit dem kanonischen Skalarprodukt. Ferner sei $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ mit $1 \leq i, j \leq n$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha_{ij} = \langle x_i, x_j\rangle$ $(1 \leq i, j \leq n)$

(ii) $A = [\alpha_{ij}] \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist symmetrisch und positiv semidefinit, d.h. es gilt $x^T Ax \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 12 (6 Punkte)

Gibt es Matrizen A, B, C, D mit den folgenden Eigenschaften?

a) $A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist normal, nicht diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, nicht orthogonal.

b) $B \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, normal, nicht symmetrisch.

c) $C \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ ist diagonalisierbar über $\mathbb{R}$, nicht normal, nicht symmetrisch.

d) $D \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ist normal, nicht hermite'sch, nicht unitär.

Geben Sie jeweils ein Beispiel an (mit Nachweis der Eigenschaften), oder zeigen Sie, dass eine solche Matrix nicht existieren kann.

Hinweis: Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ heißt normal, wenn: $A \cdot A^T = A^T \cdot A$.

Abgabe: Bis Donnerstag, 5.05.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage