Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Wir betrachten den $\mathbb{R}^3$ mit dem kanonischen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
Für $a \in \mathbb{R}^3$ mit $||a|| = 1$ definieren wir $S_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ durch $S_a v := v - 2aa^T v$.
Zeigen Sie:

a) S_a definiert eine Spiegelung

b) Es gilt für jedes $T \in O(3) : TS_aT^T = S_{Ta}$

c) Sind $u, v \in \mathbb{R}^3$ verschieden mit $||u|| = ||v||$, so existiert ein $a \in \mathbb{R}^3$ mit $S_a(u) = v$ und $S_a(v) = u$.

Hinweis: $O(n)$ bezeichnet die Gruppe aller orthogonalen $(n \times n)$-Matrizen.

Aufgabe 14 (6 Punkte)

Es sei V ein zweidimensionaler komplexer Vektorraum, $\{b_1, b_2\}$ eine Basis von V.

a) Zeigen Sie: Mit

$$\bullet : \begin{cases} V \times V & \to \quad \mathbb{C} \\ (\sum x_i b_i, \sum y_i b_i) & \to \quad 4x_1\overline{y_1} - 2x_1\overline{y_2} - 2x_2\overline{y_1} + 3x_2\overline{y_2} \end{cases}$$

ist V eine unitärer Raum.

b) Welche Werte sind für $f(b_1, b_2)$ möglich, wenn $f : V \times V \to \mathbb{C}$ ein hermite'sches Produkt ist mit

$$f(b_1, b_1) = 4 \text{ und } f(b_2, b_2) = 1?$$

Aufgabe 15 (6 Punkte)

Es sei f eine Isometrie eines euklid'schen oder unitären Vektorraumes. Zeigen Sie:

a) Für alle Eigenwerte λ von f gilt $|\lambda| = 1$.

b) Sind λ_1, λ_2 zwei verschiedene Eigenwerte von f, dann gilt: $E_f(\lambda_1) \perp E_f(\lambda_2)$, wobei $E_f(\lambda)$ den zu λ gehörigen Eigenraum bezeichnet.

Aufgabe 16 (6 Punkte)

Beweisen Sie: Eine Matrix $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ ist genau dann symmetrisch und positiv definit, wenn es eine invertierbare Matrix $S \in GL(n, \mathbb{R})$ mit $A = S^T S$ gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, 12.05.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage