Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Törner
Dipl.-Math. M. Dieter
Dipl.-Math. Ch. Henkel

SS 2011

Übungen zur Linearen Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 17 (6 Punkte)

Ist $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ hermite'sch und $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, so heißt $R_A(x) := \frac{x^H Ax}{x^H x}$ der Rayleigh-Quotient von A. Zeigen Sie, dass für die Eigenwerte λ_i von A mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ und die zugehörigen Eigenvektoren $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gilt:

a) $R_A(x) \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

b) $\lambda_i = R_A(x_i)$ für $1 \leq i \leq n$.

c) $\lambda_1 = \max_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} R_A(x)$ und $\lambda_n = \min_{x\in\mathbb{C}^n\setminus\{0\}} R_A(x)$

Aufgabe 18 (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Spektralzerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -3 \\ 5 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 19 (6 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $X \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ schiefsymmetrisch. Zeigen Sie:

a) $(I_n - X)$ ist invertierbar.

b) $(I_n + X)$ und $(I_n - X)$ sind normal.

c) $A = (I_n - X)^{-1} \cdot (I_n + X)$ ist eine orthogonale Matrix mit $\det A = 1$.

Aufgabe 20 (6 Punkte)

Es sei V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und U ein endlich dimensionaler Teilraum von V. Für $v + U \in V/U$ sei

$$|||v + U||| := \inf\{||v + u|| \mid u \in U\}.$$

Zeigen Sie, dass $|||\cdot|||$ wohldefiniert und eine Norm auf V/U ist. Welche geometrische Bedeutung hat $|||v + U|||$, wenn $V = \mathbb{R}^3$ (mit dem üblichen Skalarprodukt) und U ein zweidimensionaler Teilraum des $\mathbb{R}^3$ ist?

Abgabe: Bis Donnerstag, 19.05.2011, 10:15 Uhr, Briefkästen LE 4.Etage