Universität Duisburg–Essen **WS 2010/2011**
Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. G. Törner

Probeklausur zur Vorlesung "Lineare Algebra I"

Aufgabe 1:

Gegeben sei das folgenden lineare Gleichungssystem mit Koeffizienten in $\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & (a-1)x_2 & & & & & & ax_5 & = & 1 \\ ax_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & + & x_4 & + & 2ax_5 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & x_4 & + & (a+1)x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & ax_4 & + & (a+1)x_5 & = & 1 \end{array}$$

(i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a, ob das System lösbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls die Dimension des Lösungsraumes.

(ii) Bestimmen Sie alle Lösungen für $a = 2$.

Aufgabe 2:

Es sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$ und I_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ sei außerdem die Matrix mit $b_{ij} = 1$ für $1 \leq i, j \leq n$. Mit $a, b \in \mathbb{R}$ bilden wir die Matrix

$$A = a \cdot I_n + b \cdot B.$$

Beweisen Sie: A ist genau dann singulär, wenn $a^2 + nab = 0$.

Aufgabe 3:

Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ und die Vektoren x_1, x_2, x_3, x_4 seien linear unabhängig. Es seien außerdem wie folgt zwei Untervektorräume von V definiert:

$$U := \langle x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_2 - x_3 \rangle$$
$$W := \langle x_2 + x_4, x_1 + x_2 + x_3 \rangle$$

Bestimmen Sie die Dimensionen von $U, W, U \cap W$ und $U \cup W$.

Aufgabe 4:

Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K, U_1, U_2, U_3 seien Untervektorräume von V. Welche der folgenden beiden Aussagen sind allgemeingültig und welche nicht? (Beweis oder Gegenbeispiel)

(a) Sind $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängige Elemente aus U_1 und ist $x_0 \in V \setminus U_1$, so sind $x_0, x_1, \ldots x_n$ linear unabhängig.

(b) Sind U_1, U_2, U_3 paarweise verschieden und alle nicht der Nullvektorraum, so existieren linear unabhängige Elemente u_1, u_2, u_3 mit $u_i \in U_i$ für $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 5:

Für jede richtig beantwortete Frage erhalten Sie einen Punkt, für eine falsche Antwort wird Ihnen ein Punkt abgezogen. Nicht beantwortete Fragen werden mit 0 Punkten bewertet. Die Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe kann 0 Punkte nicht unterschreiten.

		richtig	falsch
1)	Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat immer unendlich viele Lösungen.	☐	☐
2)	Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{Re}(z) \cdot \mathrm{Re}(w) = \mathrm{Re}(z \cdot w)$, wobei $\mathrm{Re}(z)$ den Realteil der komplexen Zahl z bezeichnet.	☐	☐
3)	Die Relation $\sim$, definiert durch $x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x = y$, ist eine Äquivalenzrelation.	☐	☐
4)	Ist für zwei beliebige Matrizen A und B sowohl $A + B$ als auch $A \cdot B$ erklärt, so sind A und B quadratische Matrizen.	☐	☐
5)	Ist V ein n-dimensionaler Vektorraum, so erzeugt jedes System mit mehr als n Vektoren V.	☐	☐
6)	Sind die Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig, so sind für jedes $r \in \mathbb{R}^n$ auch $a + r, b + r \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängig.	☐	☐
7)	Die Menge der $(m \times n)$-Matrizen mit reellen Einträgen und den üblichen Verknüpfungen von Matrizen bildet einen Vektorraum.	☐	☐