

Übungen zur Scheduling-Theorie

Blatt 5

Aufgabe 15

Betrachten Sie das Problem $1|prec, (prmp)| \sum w_j C_j$ mit der folgenden Menge von Jobs:

Jobs	1	2	3	4	5	6	7
w_j	0	18	12	8	8	17	16
p_j	3	6	6	5	4	8	9

und den Reihenfolgerandbedingungen:

$$\begin{array}{l} 1 \longrightarrow 2 \\ 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \\ 6 \longrightarrow 7 \end{array}$$

Bestimmen Sie alle optimalen Jobsequenzen für dieses Problem mit und ohne Unterbrechungen der Ketten.

Aufgabe 16

Betrachten Sie das Problem $1|r_j, p_j = p|\sum w_j U_j$. Dabei bedeutet $p_j = p$, dass alle n Jobs dieselbe Bearbeitungszeit p haben. Beweisen Sie für dieses Problem die folgende Aussage:

Es gibt einen optimalen Schedule, bei dem jeder Job eine Startzeit hat, die in der Menge

$$T := \{r_j + lp \mid j = 1 \dots n; l = 0, \dots, n-1\}$$

liegt.

Aufgabe 17

Zeigen Sie, dass die optimale Lösung der LP-Relaxation des folgenden linearen Optimierungsproblems eine untere Schranke für das Problem $1|r_j|\sum w_j C_j$ darstellt.

(Hinweis: Unter der LP-Relaxation eines Optimierungsproblems versteht man das abgeschwächte Problem, in dem auf die Ganzzahligkeitsforderung für die verwendeten Variablen verzichtet wird. Beispielsweise wird also statt $x_{jt} \in \{0, 1\}$ eine reelle Variable $0 \leq x_{jt} \leq 1$ betrachtet.)

$$\sum_j w_j C_j \rightarrow \text{Min!}$$

so dass

$$\sum_t x_{jt} = 1 \quad \text{für alle } j = 1 \dots, n \quad (1)$$

$$\sum_j \sum_{s=t-p_j+1}^t x_{js} \leq 1 \quad \text{für alle } t = 0, \dots, T \quad (2)$$

$$C_j = \sum_{t=0}^T t x_{jt} + p_j \quad \text{für alle } j = 1 \dots, n \quad (3)$$

Hierbei sei erneut T eine obere Schranke für den Planungshorizont. Außerdem sei x_{jt} eine binäre Variable, die den Wert 1 annimmt, falls Job j zum Zeitpunkt t gestartet wird und 0 sonst, sowie $C_j \geq 0$ eine reelle Variable, welche wie gewohnt die Fertigstellungszeit des Jobs j repräsentiert.

Aufgabe 18

Es sei mit z^B der optimale Zielfunktionswert der LP-Relaxation des Modells aus Aufgabe 17 bezeichnet. Analog bezeichne z^A der optimalen Zielfunktionswert der LP-Relaxation des Modells aus Aufgabe 9. Zeigen Sie, dass folgende Beziehung gilt:

$$z^A \leq z^B.$$

Abgabe: bis Mittwoch, den 19.05.2010 zu Beginn der Übung