Übungen zur Vorlesung Wahrscheinlichkeitstheorie II

Übungsblatt 1

Radon-Nikodym-Ableitungen

Aufgabe 1.1 (**Rechenregeln für Radon-Nikodym Ableitungen**). Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ messbarer Raum und ν, μ, α endliche Maße auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\nu \ll \mu \ll \alpha$.

(a) Zeige, dass die Kettenregel für die Radon-Nikodym-Ableitung gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\alpha} \qquad \alpha\text{-f.ü.}$$

(b) Es sei $f := \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ und es gelte zusätzlich $\mu \ll \nu$, also $\mu \equiv \nu$. Zeige, dass

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} = \frac{1}{f} \qquad \mu\text{-f.ü.}$$

(c) Zeige, dass $f := \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}(\mu+\nu)}$ existiert und drücke $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ mit Hilfe von f aus.

Aufgabe 1.2. Sei λ das Lebesguemaß auf $[0,1]$.

(a) Ein Laplace-Würfel mit Werten 1 bis 6 werde 2-mal unabhängig geworfen. Sei P die Verteilung des Minimums, und Q die des Maximums der beiden Würfe. Bestimme $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}$.

(b) Sei $f(x) = x^2$, und P das durch $P(A) := \lambda\big(f^{-1}(A)\big)$ definierte Maß auf $[0,1]$. Berechne $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}$.

(c) Finde Wahrscheinlichkeitsmaße $P_n \ll \lambda$, $n \in \mathbb{N}$, mit folgender Eigenschaft. (P_n) konvergiert schwach gegen ein P, und $\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}\lambda}$ konvergiert fast sicher, aber $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\lambda}$ existiert nicht.

Aufgabe 1.3 (**Lebesgue-singuläres Maß ohne Atome**). Betrachte $[0,1]$ mit Lebesguemaß λ sowie Funktionen $h_1, h_2\colon [0,1] \to [0,1]$ mit $h_1(x) = \frac{x}{3}$ und $h_2(x) = \frac{x+2}{3}$. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $[0,1]$ mit

$$P(A) = \tfrac{1}{2} P\big(h_1^{-1}(A)\big) + \tfrac{1}{2} P\big(h_2^{-1}(A)\big)$$

Die Existenz von P darf angenommen werden.*

(a) Zeige, dass P keinen zu λ absolut stetigen Anteil hat, also $P \perp \lambda$.

(b) Zeige, dass P keine Atome hat, also $P\big(\{\, x \,\}\big) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ gilt.

Hinweis: Nimm an, es gibt ein Atom und konstruiere durch Iteration mit h_1, h_2 einen Widerspruch.

---

*Sie folgt z.B. aus dem Satz von Krylov-Bogolyubov. Alternativ kann P auch explizit konstruiert werden.

Abgabe: Di, 26.10. in der Übungsstunde

Arbeitsgruppenvorträge:

Am **19.10.** gibt Wolfgang Löhr einen Vortrag über Teile seiner Doktorarbeit.

Complexity Measures of Discrete-Time Stochastic Processes,
Continuity and Ergodic Decomposition

Am **26.10.** gibt Anton Klimovsky vom Hausdorff-Zentrum in Bonn einen Vortrag über

Universal macroscopic behaviour of evolving genealogies of
spatial Lambda-Flemming-Viot processes

Abstract: We consider a class of stochastic processes – the so-called spatial Lambda-Flemming-Viot processes – that describe the evolution of the genealogies in the spatially extended populations with migration and occasionally large (i.e., comparable to the population size) reproduction events. What reproduction mechanisms can be observed in these processes on the macroscopic level? We argue that, in the regime when the migration mechanism mixes the spatially extended population well, the macroscopic reproduction behaviour is rather universal and is described by the Kingman coalescent. Joint work in progress with A. Greven and A. Winter.

Hierzu ergeht eine herzliche Einladung. Zeit: **16.00 – 17.00**. Raum: S05 T03 B72