

## 2. Übung Funktionalanalysis

### Metrische Räume II

**Begriffe:** Cauchyfolge, Vollständigkeit, Vervollständigung

### Hausaufgabe

**Abgabe bis 30.04.2009 (in der Übung)**

1. (2 P.) Sei  $X = [0, 1)$  und  $d(x, y) = |x - y|$ . Geben Sie ein Beispiel einer Cauchyfolge an, welche nicht konvergiert.
2. (4 P.) Ist  $C[a, b]$  mit der Metrik  $d(f, g) = \left(\int_a^b |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$  vollständig?
3. (3 P.) Ist  $\mathbb{R}^n$  mit der Metrik  $d(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ ,  $p \geq 1$  vollständig?
4. (5 P.) Sei  $d$  eine Metrik in  $X$ . Zeigen Sie, daß

$$d_1(x, y) = \ln(1 + d(x, y))$$

ebenfalls eine Metrik in  $X$  ist. Was kann über die Vollständigkeit von  $X$  in der Metrik  $d_1$  ausgesagt werden, falls  $X$  bezüglich  $d$  vollständig ist?

5. (6 P.) Sind die Räume  $(\mathbb{N}, d_1)$  bzw.  $(\mathbb{N}, d_2)$  mit  $d_1(m, n) = \frac{|m-n|}{mn}$  bzw.

$$d_2(m, n) = \begin{cases} 0 & , \quad n = m \\ 1 + \frac{1}{m+n} & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

vollständig? Geben Sie gegebenenfalls eine Vervollständigung an.

### Übungsaufgaben

1. Sei  $X$  die Menge aller Zahlenfolgen und  $d(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$ . Zeigen Sie, daß  $d$  eine Metrik ist und daß  $(X, d)$  ein vollständiger metrischer Raum ist.
2. Es sei  $f$  eine streng monoton wachsende Funktion, welche  $\mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}$  (surjektiv) abbildet, und  $d$  sei  $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$ . Zeigen Sie, daß  $(\mathbb{R}, d)$  vollständig ist.
3. Werden durch folgende Ausdrücke  $d$  vollständige metrische Räume  $(\mathbb{R}, d)$  definiert?

(a)  $d_1(x, y) = |e^x - e^y|$

(b)  $d_2(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$

(c)  $d_3(x, y) = |x^3 - y^3|$

Geben Sie gegebenenfalls eine Vervollständigung an.

4. Konstruieren Sie in  $(\mathbb{N}, d)$  mit

$$d(n, m) = \begin{cases} 0 & , \quad n = m \\ 1 + \frac{1}{m+n} & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

eine Folge ineinandergeschachtelter nichtleerer abgeschlossener Kugeln, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Homepage der Veranstaltung ist:

[http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV\\_krumbiegel\\_SS09.shtml](http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_krumbiegel_SS09.shtml)

### Termine und Räume:

|    |    | Zeit  | Raum   |                  |
|----|----|-------|--------|------------------|
| VL | Di | 08-10 | LE 103 | Arnd Rösch       |
|    | Do | 10-12 | LE 103 |                  |
| Ü  | Do | 08-10 | LE 103 | Klaus Krumbiegel |