SS 2012
Prof. Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

# Übung Inverse Probleme

Blatt 1

**Aufgabe 1**

Seien $X, Y$ Banachräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie:

(i) $A$ ist stetig genau dann, wenn $A$ beschränkt ist.

(ii) Ist $A$ surjektiv und gibt es ein $C > 0$ so, dass $\|Ax\| \geq C\|x\|$ für alle $x \in X$, dann ist $A$ stetig invertierbar.

(iii) Ist $A$ stetig, injektiv und $R(A)$ abgeschlossen, dann ist $A^{-1} : R(A) \to X$ stetig.

(iv) Ist $A$ stetig und bijektiv, dann ist $A$ stetig invertierbar.

**Aufgabe 2**

Die Ableitung einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ kann bekanntlich mit dem Differenzenquotient

$$f'(x_0) \approx D_{+,h} f(x_0) := \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

approximiert werden. Allerdings erfolgt die Berechnung der Funktionswerte stets mit einem numerischen Fehler in der Größenordnung $\delta$, d.h.

$$|f(x) - f_\delta(x)| \leq \delta, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Damit gilt folgende Fehlerabschätzung (siehe Vorlesung):

$$|f'(x_0) - D_{+,h} f_\delta(x_0)| \leq Ch + 2\frac{\delta}{h}. \tag{1}$$

(i) Weisen Sie die obige Fehlerabschätzung (1) nach.

(ii) Berechnen Sie die optimale Schrittweite $h$, um den Fehler zu minimieren.

(iii) Die Funktion $f$ sei dreimal stetig differenzierbar. Wie sieht die Abschätzung für den zentralen Differenzenquotienten

$$D_h f(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

aus? Berechnen Sie auch hierfür die optimale Schrittweite.

(iv) Überzeugen Sie sich, dass dieses Problem (gegensätzliches Verhalten von Approximationsfehler und Datenfehler) bei der numerischen Integration nicht auftritt (Ein Beispiel für ein Verfahren der numerischen Integration genügt).

Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml

**Termine und Räume:**

| | | Zeit | Raum | |
|---|---|---|---|---|
| VL | Di | 10-12 | LE 103 | Arnd Rösch |
| | Do | 10-12 | LE 103 | |
| Üb | Mo | 14-16 | LE 103 | Hendrik Feldhordt |