SS 2012 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Inverse Probleme

Blatt 2

Aufgabe 1

Wir betrachten die eindimensionale Diffusionsgleichung

$$-(a(x)u'(x))' = f(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{1}$$

mit den Randbedingungen

$$a(0)u'(0) = b_0, \quad \text{und} \quad a(1)u'(1) = b_1. \tag{2}$$

Dieses Randwertproblem kann als eindimensionales Modell einer stationären Wärmeverteilung in einem inhomogenen Stab gesehen werden. Dabei bezeichnet $u(x)$ die Temperatur im Punkt x, $a(x)$ die ortsabhängige Wärmeleitfähigkeit und $f(x)$ eine zusätzliche Wärmequelle. An den Rändern des Stabes ist der Wärmefluss durch die Randbedingung bestimmt. Die Bestimmung des Diffusionskoeffizienten $a(x)$ aus der Kenntnis von u und f definiert ein inverses Problem (Parameteridentifikation).

(i) Sei

$$f(x) = \begin{cases} -4x+2 & , x \in [0,1/2] \\ 0 & , x \in (1/2,1] \end{cases} \quad \text{und} \quad u(x) = \begin{cases} x^2 - x + 5/4 & , x \in [0,1/2] \\ 1 & , x \in (1/2,1] \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass für jede in $[1/2,1]$ differenzierbare Funktion $\varphi(x)$ mit $\varphi(1/2) = 0$ und $\varphi'(1/2) = 1$ der Koeffizient

$$a(x) = \begin{cases} x - 1/2 & , x \in [0,1/2] \\ \varphi(x) & , x \in (1/2,1] \end{cases}$$

die Gleichung (1) erfüllt.

(ii) Zeigen Sie: Sei $a(x)$ ein differenzierbarer Diffusionskoeffizient, welcher (1)-(2) erfüllt. Dann gilt

$$\int_0^1 f(s)ds = b_0 - b_1.$$

(iii) Sei $f(x) = -1$ für $x \in [0,1]$ und $b_0 = 0$, $b_1 = 1$. Für $u(x) = x$ löst der Diffusionskoeffizient $a(x) = x$ offensichtlich die Diffusionsgleichung. Zeigen Sie, dass zur gestörten Lösung

$$u_\varepsilon(x) = x + \varepsilon \sin(x/\varepsilon^2)$$

der Diffusionskoeffizient

$$a_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon x}{\varepsilon + \cos(x/\varepsilon^2)}$$

gehört. Wie verhalten sich $u_\varepsilon(x)$ und $a_\varepsilon(x)$ für $\varepsilon \to 0$?

Aufgabe 2
Wir betrachten das Problem aus Beispiel 2.1 der Vorlesung, welches durch die Integralgleichung

$$[A(x)](t) = \int_0^t x(s)ds = y(t), \qquad 0 \leq t \leq 1. \tag{3}$$

gegeben war, und überführen es in ein endlichdimensionales Problem: Das Intervall $[0,1]$ wird in n Teilintervalle der Länge $h = 1/n$ mit den jeweiligen Intervallendpunkten $t_i = ih$, $i = 1, \ldots, n$ zerlegt. Die Funktionswerte in diesen Punkten werden mit $x_i = x(t_i)$ bzw. $y_i = y(t_i)$ bezeichnet.

(i) Ersetzen Sie (3) mit Hilfe der einfachen Rechteckregel durch ein endlichdimensionales Problem der Gestalt

$$\underline{\mathrm{Ax}} = \underline{\mathrm{y}}$$

mit $\underline{\mathrm{A}} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\underline{\mathrm{x}} = (x_i)_{i=1}^n$ und $\underline{\mathrm{y}} = (y_i)_{i=1}^n$. Wie sieht die Matrix A aus?

(ii) Ist das diskretisierte Problem ebenfalls inkorrekt nach Hadamard?

(iii) Es sei $\underline{\mathrm{y}}_\delta$ eine Näherung des Vektors $\underline{\mathrm{y}}$. Zeigen Sie folgende Ungleichung des relativen Fehlers in $\underline{\mathrm{x}}$:

$$\frac{\|\underline{\mathrm{x}} - \underline{\mathrm{x}}_\delta\|_2}{\|\underline{\mathrm{x}}\|_2} \leq \kappa(\underline{\mathrm{A}}) \frac{\|\underline{\mathrm{y}} - \underline{\mathrm{y}}_\delta\|_2}{\|\underline{\mathrm{y}}\|_2},$$

wobei $\kappa(\underline{\mathrm{A}})$ die Konditionszahl der Matrix bezeichnet.

(iv) Woran lässt sich die Inkorrektheit von (3) in dem durch die Diskretisierung erzeugten linearen Gleichungssystem erkennen?

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	LE 103	Arnd Rösch
	Do	10-12	LE 103	
Üb	Mo	14-16	LE 103	Hendrik Feldhordt