Übung Inverse Probleme

Blatt 3

Aufgabe 1

Wir betrachten die lineare Volterra-Integralgleichung

$$[Ax](s) := \int_0^s (s-t)x(t)dt = y(s) \qquad 0 \le s \le T. \tag{1}$$

in den Räumen $C[0,T]$ bzw. $L^2(0,T)$.

(i) Zeigen Sie, dass die Integralgleichung (1) die Identifikation der zeitabhängigen Beschleunigung x eines zum Nullpunkt in Ruhe befindlichen Fahrzeuges aus Messungen des zurückgelegten Weges y charakterisiert:

$$y''(s) = x(s), \qquad y(0) = y'(0) = 0 \qquad 0 \le s \le T.$$

(ii) Schreiben Sie (1) als lineare Fredholmsche Integralgleichung 1.Art mit einer Kernfunktion $k(s,t)$, $(s,t) \in [0,T] \times [0,T]$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Gleichung inkorrekt ist und diskutieren Sie dabei die Erfüllung der drei Hadamardschen Bedingungen (Benutzen Sie Resultate aus der Vorlesung).

Aufgabe 2

Wir betrachten im Folgenden die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung, welche durch die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t), \qquad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \tag{2}$$

gegeben ist. Dabei ist die Funktion $f(x,t)$ ein zusätzlicher Quellterm. Weiterhin nehmen wir homogene Randbedingungen und Anfangswertbedingungen an:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, \quad 0 < x < \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Das direkte Problem besteht darin, für eine gegebene Quelle $f(x,t)$ die Wärmeverteilung über die partielle Differentialgleichung und die Anfangs- und Randbedingungen zu bestimmen. Das inverse Problem ist die Identifizierung der Quelle $f(x,t)$ durch Temperaturmessungen $u(\kappa,t)$ an einem inneren Punkt κ mit $0 < \kappa < \pi$.

Zeigen Sie, dass dieses inverse Problem äquivalent ist zur Integralgleichung

$$u(\kappa,t) = [A\,f](t) \quad \text{mit} \quad [A\,f](t) = \int_0^t \int_0^\pi k(s,t-\tau) f(s,\tau)\, ds d\tau$$

mit Kern

$$k(s,z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z} \sin(n\kappa) \sin(ns),$$

woraus folgt, dass das inverse Problem schlechtgestellt ist.

Hinweise:

- Die Funktionen $f(x,t)$ und $u(x,t)$ werden mit dem Separationsansatz in Reihen der folgenden Form entwickelt

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\varphi_n(x),$$

  mit der Wahl des Funktionensystems $\{\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$, welches ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2(0,\pi)$ bildet. Die zeitabhängigen Koeffizienten $u_n(t)$ sind so eindeutig bestimmt.

- Einsetzen in (2) und Koeffizientenvergleich führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für $u_n(t)$, welche gelöst werden kann.

Aufgabe 3
In der Vorlesung wurde erwähnt, dass lineare Fredholmsche Integralgleichungen 2.Art

$$x + Ax = y, \quad x \in X,\, y \in Y,\, A \in \mathcal{L}(X,Y) \quad x(s) + \int\limits_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \qquad c \le s \le d$$

unter gewissen Bedingungen stets korrekt nach Hadamard ist. Wir betrachten

$$[Ax](s) = \int\limits_0^s k(s,t)x(t)dt = y(s) \qquad 0 \le s \le 1 \tag{4}$$

wobei der Kern $k(s,t)$ stetig differenzierbar bezüglich t für $0 \le t \le s \le 1$ sei und $k(s,s) \ne 0$. Weiterhin sei $\varphi(s) = \int_0^s x(\tau)d\tau$. Verwenden Sie die partielle Integration in (4), um die Volterra-Integralgleichung 2.Art

$$\varphi(s) - \int\limits_0^s \left(\frac{\partial k(s,t)}{\partial t}/k(s,s)\right)\varphi(t)dt = y(s)/k(s,s)$$

zu erhalten. Umgeht man damit das Stabilitätsproblem in (4)?
Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	LE 103	Arnd Rösch
	Do	10-12	LE 103	
Üb	Mo	14-16	LE 103	Hendrik Feldhordt