

## Übung Inverse Probleme

Blatt 5

### Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass der nichtlineare Operator

$$[F(x)](s) = c_0 \exp \left( c_1 \int_0^s x(t) dt \right) \quad 0 \leq s \leq T$$

mit positiven Konstanten  $c_0$  und  $c_1$  für alle quadratisch integrierbaren Funktionen  $x \in L^2(0, T)$  eine stetige Bildfunktion  $[F(x)](s)$  liefert, und bestimmen Sie unter der Bedingung  $\|x\|_{L^2(0, T)} \leq K$  untere und obere Schranken für die Werte dieser Bildfunktionen.

### Aufgabe 2

Die Stabilisierung von inkorrekten Problemen nach dem Satz von Tichonov beruht auf der Kompaktheit des Definitionsbereiches  $D$  der Aufgabe. Zeigen Sie, dass der Definitionsbereich

$$D = \{x(t) \in [-1, 1] : x(t) \text{ stetig}\}$$

stetiger und gleichmäßig nach oben und unten beschränkter Funktionen in keinem der Funktionenräume  $C[0, 1]$  und  $L^2(0, 1)$  kompakt ist.

### Aufgabe 3

In der Vorlesung wurde erwähnt, dass jede Menge monotoner und gleichmäßig nach oben und unten beschränkter Funktionen kompakt im Banachraum  $L^p(a, b)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) ist. Zeigen Sie, dass diese Eigenschaft nicht für den Raum  $L^\infty(a, b)$  gilt.

### Aufgabe 4

Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume und  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ . Ferner bezeichnen wir mit  $\mathcal{K}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$  die Menge aller kompakter Operatoren. Zeigen Sie:

- (i) Der Operator  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$  bildet stets kompakte Mengen in kompakte Mengen ab.
- (ii) Sei  $Z$  ein weiterer Banachraum und  $K \in \mathcal{K}(Y, Z)$ , dann gilt  $KA \in \mathcal{K}(X, Z)$ . Entsprechend gilt für  $A \in \mathcal{L}(Y, Z)$  und  $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ , dass  $AK \in \mathcal{K}(X, Z)$ .
- (iii) Der inverse Operator  $K^{-1}$  eines kompakten Operators  $K \in \mathcal{K}(X, Y)$  ist unstetig. (**Hinweis:** Benutzen Sie das Resultat aus (b) und die Aussage, dass im unendlich-dimensionalen die abgeschlossene und beschränkte Einheitskugel nicht kompakt ist.)

Homepage der Veranstaltung ist:

[http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV\\_feldhordt\\_SS12.shtml](http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/LV_feldhordt_SS12.shtml)

### Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	LE 103	Arnd Rösch
	Do	10-12	LE 103	
Üb	Mo	14-16	LE 103	Hendrik Feldhordt